التكامل

4

النظرية الأساسية للتكامل – الدالة المقابلة

خواص التكامل المحدد

التكامل غير المحدد

اللوغارتم الطبيعي

إيجاد مساحة منطقة مستوية

الحجوم الدورانية

المعادلات التفاضلية

5

حل المعادلة التفاضلية

الحل الخاص والعام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية

المعادلات التفاضلية الاعتيادية من المرتبة الأولى

طرق حل المعادلات التفاضلية

الهندسة الفضائية

6

الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة

الاسقاط العمودي

الفصل الرابع (التكامل)

النظرية الأساسية التكامل ـ الدالة المقابلة

لقد تعلمنا فيما سبق طريقة ايجاد قيمة للتكامل المحدد $\int_a^b f$ حيث f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ كما وجدنا في بعض الحالات الخاصة قيمة دقيقة لهذا التكامل المحدد (باستخدام المساحة). والمبرهنة الآتية تساعدنا في إيجاد قيمة التكامل المحدد.

مبرهنة : إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فإنه توجد دالة F مستمرة على الفترة $[a,b]$ بحيث:

$F'(x) = f(x) \ , \ \forall x \in (a,b)$

ويكون : $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

تسمى F الدالة المقابلة للدالة (f) ($Antiderivative\ of\ the\ Function$) على الفترة $[a,b]$

فمثلاً : إذا كانت $f(x) = 2x \ , \ f:[1,2] \to R$

فإن $F(x) = x^2 \ , \ F:[1,2] \to R$

$F'(x) = 2x = f(x) \ , \ \forall x \in (1,2)$

وعليه فإن $\int_1^2 f = F(2) - F(1)$

$= 4 - 1 = 3$

ملاحظة: $F(2) - F(1)$ تكتب بالصورة $[F(x)]_1^2$

مثال

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,5]$ بحيث $F(x) = 3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد $\int_1^5 f(x)dx$

$\int_1^5 f(x)dx = F(5) - F(1)$

$= 3(5)^2 - 3(1)^2$

$= 3(25) - 3(1) \Rightarrow 75 - 3 = 72$

ويمكن كتابتها بصورة أخرى

التعويض بالقيمة الكبيرة ثم القيمة الصغيرة

$\int_1^5 f(x)dx = [F(x)]_1^5 = [3x^2]_1^5$

$= 3(5)^2 - 3(1)^2 \Rightarrow 75 - 3 = 72$

مثال إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ وإن الدالة المقابلة للدالة f هي $F:\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]\to R$, $F(x)=\sin x$ ، أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\,(x)\,dx$

التعويض بالقيمة الكبيرة ثم القيمة الصغيرة

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\,(x)dx=[F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0 \Longrightarrow 1-0=1$

مثال أثبت فيما إذا كانت $F(x)=x^3+2$, $F:[1,3]\to R$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=3x^2$

$F(x)=x^3+2$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R لأنها كثيرة حدود.

$\therefore$ $F(x)$ مستمرة على $[1\,,3]$ وقابلة للاشتقاق على $(1,3)$

$F'(x)=3x^2=f(x)$

$\therefore$ F هي دالة مقابلة للدالة f على $[1,3]$

مثال أثبت أن الدالة $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$, $F:R\to R$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=\cos 2x$

$f:R\to R,$ ، ثم أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\,dx$

$f(x)=cos2x$ هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ أيضاً مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$\therefore\ \grave{F}(x)=\frac{1}{2}\cos 2x\ \ (2)=\cos 2x\ =f(x)$

$\therefore$ $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$

$\because\ \int_a^b f\,(x)dx=\ [F(x)]_a^b$

$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\ \ dx=[\,\frac{1}{2}\sin 2x\,]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\sin 2\,(0)$

$=\frac{1}{2}\ \sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\ \sin 0$

$=\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}(0)$

$=\frac{1}{2}$

فيما يلي جدول مساعد يبين الدالة f والدالة المقابلة لها F

ملاحظة : يمكن التحقق من صحة ذلك بإثبات أن $F'(x) = f(x)$

الدالة المقابلة لها $F(x)$	الدالة $f(x)$
ax	a
$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x^n \ , \quad n \neq -1$
$a\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$ax^n \ , \quad n \neq -1$
$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$	$[f(x)]^n . \acute{f}(x) \ , \quad n \neq -1$
$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$	$\sec^2(ax+b)$
$-\frac{1}{a}\cot(ax+b)$	$\csc^2(ax+b)$
$\frac{1}{a}\sec ax$	$\sec ax \tan ax$
$-\frac{1}{a}\csc ax$	$\csc ax \cot ax$

مجموعة الدوال المقابلة لأية دالة f كما في الجدول هي $F + C$ حيث C عدد ثابت حقيقي.

مثال أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \ dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \ dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \tan(\tfrac{\pi}{4}) - \tan(0)$$
$$= 1 - 0 = 1$$

$$\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

مثال أوجد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \; dx$

$Cot\, x = \frac{1}{tan\, x}$

أو $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\cot\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \; dx = [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\cot\frac{\pi}{2} - \left(-\cot\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 0 + 1 = 1$$

مثال أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} secx \tan x \; dx$

$Sec\, x = \frac{1}{cos\, x}$

$Sec\, \frac{\pi}{3} = \frac{1}{cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \; dx = [\sec \; x]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= \sec\frac{\pi}{3} - \sec 0$$
$$= 2 - 1 = 1$$

مثال جد $\int_1^3 x^3 \; dx$

وذلك بأضافة (1) الى الاس والتقسيم على الاس الجديد

$$\int_1^3 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3$$
$$= \frac{(3)^4}{4} - \frac{(1)^4}{4}$$
$$= \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

خواص التكامل المحدد

أولاً:

١ – f دالة مستمرة على $[a, b]$ فإذا كانت

$f(x) \geq 0 \, , \; \forall x \in [a, b]$ فإن $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

امثلة

a) $\int_{-1}^{2} x^2\,dx \ge 0$ لأن $f(x) = x^2 \ge 0\,,\ \forall x \in [-1,2]$

b) $\int_{-2}^{3} 3\,dx > 0$ لأن $f(x) = 3 > 0\,, \forall\, x \in [-2,3]$

c) $\int_{2}^{3} (x+1)\,dx > 0$ لأن $f(x) = (x+1) > 0, \forall\, x \in [2,3]$

٢- f دالة مستمرة على $[a,b]$ فإذا كانت

$f(x) \le 0\,, \forall x \in [a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \le 0$

امثلة

a) $\int_{1}^{2} (-2)\,dx < 0$ لأن $f(x) = -2 < 0, \forall x \in [1,2]$

b) $\int_{-2}^{-1} x\,dx < 0$ لأن $f(x) = x < 0, \forall x \in [-2,-1]$

ثانياً : f دالة مستمرة على $[a,b]$ ، c عدداً حقيقياً ثابتاً :

$$\int_a^b c\,.\,f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

مثال إذا كانت $\int_2^5 f(x)\,dx = 8$ فأوجد $\int_2^5 5\,f(x)\,dx$

$$\int_2^5 5\,f(x)dx = 5\int_2^5 f(x)dx = 5\int_2^5 f(x)dx = 5(8) = 40$$

ثالثاً : إذا كانت الدالتان f_2, f_1 مستمرتين على الفترة $[a,b]$ فإن:

$$\int_a^b (f_1 \mp f_2)dx = \int_a^b f_1\,dx + \int_a^b f_2\,dx$$

ويمكن تطبيق هذه الخاصية على مجموع أي عدد محدد من الدوال المستمرة على $[a,b]$

مثال إذا كانت $\int_1^3 f_1(x)dx = 15, \int_1^3 f_2(x)dx = 17$ أوجد كلاً من

1) $\int_1^3 (f_1(x) + f_2(x))\,dx$

2) $\int_1^3 (f_1(x) - f_2(x))\,dx$

1) $\int_1^3 (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_1^3 f_1(x)dx + \int_1^3 f_2(x)dx$

$= 15 + 17$

$= 32$

2) $\int_1^3 (f_1(x) - f_2(x))\,dx = \int_1^3 f_1(x)dx - \int_1^3 f_2(x)dx$
$= 15 - 17$
$= -2$

مثال إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x$ أوجد $\int_1^2 f(x)\,dx$

$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (3x^2 + 2x)\,dx$
$= \int_1^2 3x^2dx + \int_1^2 2x\,dx$
$= 3\int_1^2 x^2\,dx + 2\int_1^2 x\,dx$
$= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$
$= [x^3]_1^2 + [x^2]_1^2 = [(2)^3 - (1)^3] + [(2)^2 - (1)^2]$
$= [8 - 1] + [4 - 1]$
$= 7 + 3 = 10$

رابعاً : إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ وكانت $c \in [a,b]$ فإن

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

اذا يوجد عدد ينتمي لفترة التكامل فان هذا العدد يجزأ فترات التكامل الى فترتين وهما من بداية الفترة الى العدد المجزيء من ثم من العدد المجزيء الى نهاية الفترة

مثال إذا كانت $\int_3^7 f(x)\,dx = 8$, $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ أوجد $\int_1^7 f(x)\,dx$

$\int_1^7 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^7 f(x)dx$
$= 5 + 8 = 13$

مثال لتكن $f(x) = |x|$ أوجد $\int_{-3}^4 f(x)\,dx$

f دالة مستمرة على الفترة $[-3,4]$ ولها قاعدتان هما

$$f(x) = \begin{cases} x & \forall x > 0 \\ -x & \forall x < 0 \end{cases}$$

لأيجاد الحد الفاصل أو المسمى بالعدد المجزيء للفترة نجعل الدالة تساوي صفر ونجد قيمه x فيكون هو العدد المجزيء اذا كان ينتمي للفترة $\Leftarrow x = 0$ [الفترة الأصلية هي $[-3,4]$ تجزأت بالعدد 0]

$$\therefore \int_{-3}^{4} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{4} (x)\,dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4}$$

$$= \left[-\left(\frac{(0)^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2}\right)\right] + \left[\frac{(4)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right])$$

$$= \left[-\left(0 - \frac{9}{2}\right)\right] + [8 - 0] = \frac{9}{2} + 8 = \frac{25}{2}$$

$x < 0$ ، 0 ، $x > 0$ ، -3 ، $\int_{-3}^{0} (-x)dx$ ، $\int_{0}^{4} (x)dx$ ، 4

مثال إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \forall x \geq 1 \\ 3 & \forall x < 1 \end{cases}$ أوجد $\int_0^5 f(x)\,dx$

نبحث استمرارية الدالة عند الحد الفاصل وهو $x = 1$

a) $f(1) = 2(1) + 1 = 3$ [التعويض في دالة اليساوي]

b) $\lim_{x\to 1} 2x + 1 = 2(1) + 1 = 3 \ldots\ldots L_1$

$\lim_{x\to 1} 3 = 3 \ldots\ldots\ldots L_2$

$\because L_1 = L_2$ $\therefore$ توجد غاية عند $x = 1$

C) $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = 1$

كذلك الدالة مستمرة على كل من $\{x: x > 1\}$, $\{x: x < 1\}$ $\therefore$ الدالة مستمرة على $[0,5]$

$x < 1$ ، 1 ، $x > 1$ ، 0 ، $\int_0^1 3\,dx$ ، $\int_1^5 (2x+1)dx$ ، 5

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^1 3\,dx + \int_1^5 (2x+1)\,dx$$

$$= [3x]_0^1 + \left[\frac{2x^2}{2} + x\right]_1^5$$

$$= 3[x]_0^1 + [x^2 + x]_1^5$$

$$= 3[1 - 0] + [((5)^2 + 5) - ((1)^2 + 1)]$$

$$= 3(1) + [30 - 2]$$

$$= 3 + 28 = 31$$

خامساً :

a) $\int_a^a f(x)dx = 0$

ex) $\int_3^3 x \; dx = \frac{x^2}{2}]_3^3 = \frac{(3)^2}{2} - \frac{(3)^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$

أو حسب القاعدة

$\int_3^3 x \; dx = 0$

b) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

ex) $\int_3^2 3x^2 dx = -\int_2^3 3x^2 dx$

$= -[\frac{3x^3}{3}]_2^3$

$= -[x^3]_2^3 = -[(3)^3 - (2)^3]$

$= -[27 - 8] = -19$

اذا كانت فترة التكامل من كبير الى صغير [اي ان الكبير تحت رمز التكامل والصغير فوق رمز التكامل] فيجب قلب الفترة و ضرب التكامل بالسالب

تمارين [3 – 4]

١ – احسب كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int_{-2}^2 (3x - 2)dx$

$= [\frac{3x^2}{2} - 2x]_{-2}^2 = \left(\frac{3(2)^2}{2} - 2(2)\right) - \left(\frac{3(-2)^2}{2} - 2(-2)\right)$

$= (6 - 4) - (6 + 4)$

$= 2 - 10 = -8$

b) $\int_1^2 (x^{-2} + 2x + 1)\, dx$

$= [\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{2x^2}{2} + x]_1^2$

$= [\frac{-1}{x} + x^2 + x]_1^2 = \left[\left(\frac{-1}{(2)} + (2)^2 + (2)\right) - \left(\frac{-1}{(1)} + (1)^2 + (1)\right)\right]$

$= \left(\frac{-1}{2} + 4 + 2\right) - (-1 + 1 + 1)$

$= \frac{-1}{2} + 6 - 1$

$= -\frac{1}{2} + 5 = \frac{9}{2}$

$c)\ \int_1^3 (x^4 + 4x)dx$

$= [\frac{x^5}{5} + \frac{4x^2}{2}]_1^3 = [\frac{x^5}{5} + 2x^2]_1^3$

$= \left(\frac{(3)^5}{5} + 2(3)^2\right) - \left(\frac{(1)^5}{5} + 2(1)^2\right)$

$= \left(\frac{243}{5} + 18\right) - \left(\frac{1}{5} + 2\right)$

$= \frac{243}{5} + 18 - \frac{1}{5} - 2$

$= \frac{242}{5} + 16$

$= \frac{322}{5}$

يمكننا توزيع الاشارة السالبه على القوس الثاني من ثم الجمع والطرح على حسب الاشارات

او يمكن ايجاد النواتج داخل الاقواس من ثم جمع او طرح الناتجين

$d)\ \int_0^2 |x-1|\ dx$

f دالة مستمرة على $[0,2]$ ولها قاعدتان وذلك لوجود المطلق

لإيجاد الحد الفاصل نجعل $f(x) = 0$ ونستخرج قيمة x

$\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(x) = \begin{cases} +(x-1) & x \geq 1 \\ -(x-1) & x < 1 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ 1-x & x < 1 \end{cases}$

0 $x < 1$ 1 $x > 1$ 2

$\int_0^1 (1-x)\ dx \quad \int_1^2 (x-1)\ dx$

$\therefore \int_0^2 |x-1|\ dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx$

$= [x - \frac{x^2}{2}]_0^1 + [\frac{x^2}{2} - x]_1^2$

$= \left[\left(1 - \frac{(1)^2}{2}\right) - 0\right] + \left[\left(\frac{(2)^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{(1)^2}{2} - 1\right)\right]$

$= \frac{1}{2} + [0 - \left(-\frac{1}{2}\right)]$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$e)\ \int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} (x + \cos x)\, dx$

$= [\frac{x^2}{2} + \sin x]_{\frac{-\pi}{2}}^{0}$

$= \left((0 + \sin 0) - (\frac{\left(\frac{-\pi}{2}\right)^2}{2} + \sin(\frac{-\pi}{2})\right)$

$= (0 + 0) - \left(\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right)$

$= -\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)$

$= 1 - \frac{\pi^2}{8}$

الإشارة السالبة في الزاوية تعني ان الزاوية تقع في الربع الرابع

∴ إشارة sin في الربع الرابع هي سالبة

$f)\ \int_{3}^{2} \frac{x^3 - 1}{x - 1}\, dx$

نقلب فترة التكامل ونضرب بالإشارة السالبة من ثم نحلل البسط فرق مكعبين وذلك للاختصار مع المقام

$= -\int_{2}^{3} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}\, dx$

$= -\int_{2}^{3} (x^2 + x + 1)\, dx$

$= -[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x]_2^3$

$= -\left[\left(\frac{(3)^3}{3} + \frac{(3)^2}{2} + 3\right) - \left(\frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} + 2\right)\right]$

$= -\left[\left(\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 2\right)\right]$

$= -\left[\left(9 + \frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{8}{3} + 2 + 2\right)\right]$

$= -\left[\left(\frac{9}{2} + 12\right) - \left(\frac{8}{3} + 4\right)\right]$

$= -\left[\frac{33}{2} - \frac{20}{3}\right] = -\left[\frac{99-40}{6}\right] = -\frac{59}{6}$

$g)\ \int_{1}^{3} \frac{2x^3 - 4x^2 + 5}{x^2}\, dx$

$= \int_1^3 (\frac{2x^3}{x^2} - \frac{4x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2})\, dx$

$= \int_1^3 (2x - 4 + 5x^{-2})\, dx$

نجزىء البسط على المقام

اي ان كل حد من حدود البسط يكون له المقام x^2

$= \left[\frac{2x^2}{2} - 4x + \frac{5x^{-1}}{-1}\right]_1^3$

$= \left[x^2 - 4x - \frac{5}{x}\right]_1^3 = \left((3)^2 - 4(3) - \frac{5}{3}\right) - \left((1)^2 - 4(1) - \frac{5}{1}\right)$

$= \left(9 - 12 - \frac{5}{3}\right) - (1 - 4 - 5)$

$= \left(-3 - \frac{5}{3}\right) - (-8)$

$= \frac{-14}{3} + 8 = \frac{10}{3}$

٢- أثبت أن $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث $F: \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \to R$ حيث

$f(x) = 1 + \cos x \quad , \quad F(x) = \sin x + x$

حيث $f: \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \to R$ ثم أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\, dx$

لإثبات ان $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$

١- نثبت أن F دالة مستمرة

$\sin x$ دالة مستمرة على $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ لأنها دالة دائرية مستمرة و x دالة مستمرة على $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ لأنها حدودية.

$\therefore$ $\sin x + x$ دالة مستمرة على $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين

٢- نثبت أن F دالة قابلة للاشتقاق

$\sin x$ دالة قابلة للأشتقاق على $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ و x دالة قابلة للاشتقاق على $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore$ $\sin x + x$ دالة قابلة للاشتقاق على $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق

٣- نثبت أن $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = \cos x + 1$$
$$= 1 + \cos x$$
$$= f(x)$$

$\therefore$ $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} = [\sin x + x]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= \left(\sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) - (\sin 0 + 0)$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - (0 + 0)$

$= \frac{3+\pi}{6}$

٣- أوجد كلاً من التكاملات الآتية :

$a)\ \int_1^4 (x-2)\,(x+1)^2 dx$

نفتح القوس الثاني مربع حدانية من ثم نوزع القوس الاول على الثاني

$= \int_1^4 (x-2)\,(x^2+2x+1)dx$

$= \int_1^4 (x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2)\, dx$

$= \int_1^4 (x^3 - 3x - 2)\, dx$

$= [\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - 2x\,]_1^4$

$= \left(\frac{(4)^4}{4} - \frac{3(4)^2}{2} - 2(4)\right) - \left(\frac{(1)^4}{4} - \frac{3(1)^2}{2} - 2\,(1)\right)$

$= \left(\frac{256}{4} - \frac{48}{2} - 8\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2\right)$

$= (64 - 24 - 8) - \left(\frac{1-6-8}{4}\right) = 32 - (-\frac{13}{4}) = \frac{128+13}{4} = \frac{141}{4}$

$b)\ \int_{-1}^{1} |x+1|\ dx$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ الحد الفاصل

$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \ge -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$

-1 1

$x < -1$ $x > -1$

$\int_{-1}^{1} (x+1)\ dx$

يكون التكامل على دالة الأكبر فقط وتهمل دالة الأصغر لأنها ليست ضمن مجال الدالة.

$\int_{-1}^{1} (x+1)\, dx = [\frac{x^2}{2} + x\,]_{-1}^{1}$

$= \left(\frac{(1)^2}{2} + (1)\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right)$

$= \left(\frac{1}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$

$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$c)\ \int_2^3 \frac{x^4-1}{x-1}\,dx$

نحلل البسط فرق بين مربعين من ثم نحلل القوس الاول ايضا فرق بين مربعين وذلك للإختصار مع المقام

$$= \int_2^3 \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}\,dx$$

$$= \int_2^3 \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)}\,dx$$

$$= \int_2^3 (x^3 + x + x^2 + 1)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x\right]_2^3$$

$$= \left(\frac{(3)^4}{4} + \frac{(3)^2}{2} + \frac{(3)^3}{3} + 3\right) - \left(\frac{(2)^4}{4} + \frac{(2)^2}{2} + \frac{(2)^3}{3} + 2\right)$$

$$= \left(\frac{81}{4} + \frac{9}{2} + \frac{27}{3} + 3\right) - \left(\frac{16}{4} + \frac{4}{2} + \frac{8}{3} + 2\right)$$

$$= \left(\frac{81}{4} + \frac{9}{2} + 9 + 3\right) - \left(4 + 2 + \frac{8}{3} + 2\right)$$

$$= \frac{81}{4} + \frac{9}{2} + 12 - 8 - \frac{8}{3} = \frac{243+54-32}{12} + 4 = \frac{265+48}{12} = \frac{313}{12}$$

$d)\ \int_0^1 \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^2\,dx$

نحول الجذور الى دوال اسيه ($\frac{\text{قوة الدالة}}{\text{دليل الجذر}}$)

$$= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} + 2\right)^2 dx$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\left(x + 4x^{\frac{1}{2}} + 4\right) dx$$

$$= \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + 4x + 4x^{\frac{1}{2}})\,dx$$

عملية توزيع (عند الضرب تجمع الاسس)

$$= \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{4x^2}{2} + 4\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 2x^2 + \frac{8}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{5}\sqrt{(1)^5} + 2(1)^2 + \frac{8}{3}\sqrt{(1)^3}\right) - \left(\frac{2}{5}\sqrt{(0)^5} + 2(0)^2 + \frac{8}{3}\sqrt{(0)^3}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{5} + 2 + \frac{8}{3}\right) - (0)$$

$$= \frac{6+30+40}{15} = \frac{76}{15}$$

٤- إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 3 \\ 6 & x < 3 \end{cases}$ ، جد $\int_1^4 f(x)\ dx$

نبحث استمرارية الدالة عند $x = 3$

1) $f(3) = 2(3) = 6$

2) $\lim_{x\to3}(2x) = 2(3) = 6 \quad \ldots\ldots L_1$

$\lim_{x\to3} 6 = 6 \quad \ldots\ldots L_2$

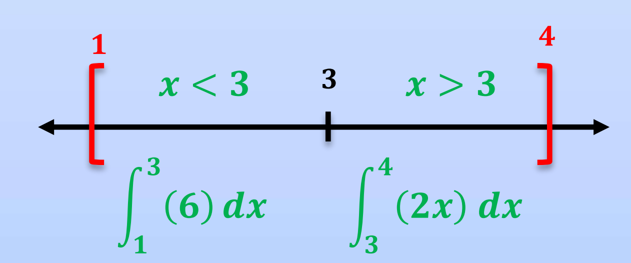
$\because L_1 = L_2$

$\therefore$ توجد غاية عند $x = 3$

3) $f(3) = \lim_{x\to3} f(x)$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = 3$ وعند $\{x : x > 3\}$ و $\{x : x < 3\}$

$\therefore$ الدالة مستمرة على الفترة $[1,4]$



$\int_1^4 f(x)\ dx = \int_1^3 (6)\ dx + \int_3^4 (2x)\ dx$

$= [6x]_1^3 + \left[\frac{2x^2}{2}\right]_3^4$

$= [6(3) - 6(1)] + [(4)^2 - (3)^2]$

$= (18 - 6) + (16 - 9) = 12 + 7 = 19$

٥- إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \forall x \geq 0 \\ 2x & \forall x < 0 \end{cases}$ ، جد $\int_{-1}^3 f(x)\ dx$

نبحث الاستمرارية عند $x = 0$

1) $f(0) = 3(0)^2 = 0$

2) $\lim_{x\to0}(3x^2) = 3(0)^2 = 0 \ldots\ldots L_1$

$\lim_{x\to0}(2x) = 2(0) = 0 \quad \ldots\ldots L_2$

$\because L_1 = L_2$

3) $f(0) = \lim_{x\to0} f(x)$

$\therefore$الدالة مستمرة عند $x = 0$ ، $\{x : x > 0\}$ ، $\{x : x < 0\}$

$\therefore$ الدالة مستمرة على $[-1,3]$

$x < 0$ 0 $x > 0$

-1 $\int_{-1}^0 (2x)\ dx$ $\int_0^3 (3x^2)\ dx$ 3

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(2x)\,dx + \int_{0}^{3}(3x^2)dx$

$= [\frac{2x^2}{2}]_{-1}^{0} + [\frac{3x^3}{3}]_{0}^{3}$

$= [(0)^2 - (-1)^2] + [(3)^3 - (0)^3]$

$= (0-1) + (27-0) = -1 + 27 = 26$

التكامل غير المحدد

عرفنا في النظرية الأساسية للتكامل إنه إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فإنه توجد دالة مقابلة F مستمرة على $[a,b]$ بحيث أن $\forall x \in (a,b)$ ، $F'(x) = f(x)$

فمثلاً:

$F(x) = x^2$ ، $F:[1,3] \to R$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = 2x$

ولكن هل $F(x) = x^2$ دالة مقابلة وحيدة للدالة $F'(x) = 2x$ ؟

وقبل الإجابة على هذا السؤال نتأمل الدوال الآتية:

1) $F_1:[1,3] \to R \quad , F_1(x) = x^2 + 1$

2) $F_2:[1,3] \to R \quad , F_2(x) = x^2 + \frac{1}{2}$

3) $F_3:[1,3] \to R \quad , F_3(x) = x^2 - \sqrt{2}$

4) $F_4:[1,3] \to R \quad , F_4(x) = x^2 - 5$

إننا نلاحظ أن كلاً من F_1, F_2, F_3, F_4 لها صفات F نفسها أي أن كلاً منها

(i) مستمرة على $[1,3]$

(ii) قابلة للاشتقاق على $(1,3)$

(iii) $F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = F_4'(x) = 2x \quad , \quad \forall x \in (1,3)$

وبناءاً على ذلك يمكن القول بأن كلاً من: F_1, F_2, F_3, F_4 دالة مقابلة إلى f

أي أنه توجد أكثر من دالة مقابلة للدالة المستمرة على $[1,3]$ والفرق بين أي دالتين مقابلتين للدالة f يساوي عدداً ثابتاً لاحظ أن:

$F_1(x) - F_2(x) = (x^2+1) - \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$F_1(x) - F_4(x) = (x^2+1) - (x^2-5) = 6$

وبصورة عامة :

إذا كانت للدالة f المستمرة على $[a,b]$ دالة مقابلة F فإن يوجد عدد لا نهائي من الدوال المقابلة للدالة f ، كل منها تكون من الصورة $F + C$ حيث C عدداً ثابتاً والفرق بين أي إثنين منها يساوي عدداً ثابتاً.

تسمى مجموعة الدوال المقابلة التي على الصورة $F + C$ بالتكامل غير المحدد للدالة f المستمرة على $[a,b]$

ويرمز لها بالرمز $\int f(x)\,dx$ إذا كان رمز المتغير x كما يمكن كتابة التكامل غير المحدد بالصورة

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

مثال أوجد $\int f(x)\,dx$ لكل مما يأتي :

$a)\ f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$$\int f(x)\,dx = \int (3x^2 + 2x + 1)\,dx$$
$$= \frac{3x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x + c$$
$$= x^3 + x^2 + x + c$$

∵ التكامل غير محدد أي عدم وجود فترة للتكامل

∴ يجب إضافة ثابت التكامل (c)

$b)\ f(x) = \cos x + x^{-2}$

$$\int f(x)dx = \int (\cos x + x^{-2})\,dx$$
$$= \sin x + \frac{x^{-1}}{-1} + c$$
$$= \sin x - \frac{1}{x} + c$$

$c)\ f(x) = x + \sec x \tan x$

$$\int f(x)dx = \int (x + \sec x \tan x)\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + \sec x + c$$

$d)\ f(x) = \sin(2x + 4)$

$$\int f(x)dx = \int \sin(2x+4)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(-\cos(2x+4)) + c = \frac{-1}{2}\cos(2x+4) + c$$

$\frac{1}{\text{مشتقة الزاوية}}$ * تكامل الدالة الدائرية

مثال جد التكاملات لكل مما يأتي:

$a)\ \int (x^2 + 3)^2 (2x)\,dx$

$f(x) = x^2 + 3$ دالة داخل القوس المرفوع الى قوة

$f'(x) = 2x$ المشتقة

$$\therefore \int (x^2+3)^2(2x)\,dx = \int [f(x)]^n f'(x)dx$$

تهمل

$$= \frac{1}{3}[f(x)]^3 + c$$
$$= \frac{1}{3}(x^2 + 3)^3 + c$$

بما ان مشتقة الدالة موجودة بجانب الدالة

اذن نهمل المشتقة ونكامل الدالة وذلك بإضافة

(1) الى اس الدالة والقسمة على الاس الجديد

ملاحظة

إذا كانت الدالة عبارة عن قوس مرفوع إلى قوة فنبحث عن وجود مشتقة داخل القوس (مشتقة الدالة).

- ❖ إذا كانت المشتقة موجودة فتهمل ونكامل القوس فقط حيث نضيف (1) إلى الأس ونقسم على الأس الجديد.
- ❖ إذا كانت المشتقة موجودة لكنها ناقصة فنضرب المشتقة بالعدد الناقص ونقسم عليه حتى نوجد المشتقة فتهمل وتبقى القسمة خارج التكامل ونكامل القوس كما ذكر سابقاً.
- ❖ أما إذا لم تكن المشتقة موجودة مع القوس فلا يمكن إتباع هذه القاعدة فنحاول التبسيط أو التحليل أو التوزيع أو الاختصار ....الخ .

$b) \int (3x^2+8x+5)^6 (3x+4)dx$

∵ قوس مرفوع إلى قوة فتكون داخل القوس هي $f(x)$ ونبحث وجود $f'(x)$

$f(x) = 3x^2+8x+5$

$f'(x) = 6x+8$

نلاحظ أن القوس الثاني يحتاج ان يضرب بـ (2) حتى يساوي المشتقة

∴ نقسم ونضرب بـ (2)

البسط نوزعه على القوس الثاني أما المقام فيبقى خارج التكامل

$$= \frac{2}{2}\int (3x^2+8x+5)^6(3x+4)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6(6x+8)\, dx$$

$f'(x)$ تهمل

الآن سوف نكامل القوس المرفوع الى القوة وذلك بإضافة (1) إلى الأس والتقسيم على الأس الجديد

$$= \frac{1}{2}\, \frac{(3x^2+8x+5)^7}{7} + c$$

$$= \frac{1}{14}(3x^2+8x+5)^7 + c$$

$c) \int \sin^4 x \ \cos x \ dx$

$\int (\sin x)^4 \cos x\, dx$

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$$\therefore = \frac{(\sin x)^5}{5} + c \Rightarrow \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

$d)\ \int \tan^6 x \ \sec^2 x \ dx$

$\int (\tan x)^6 \sec^2 x \ dx$

$f(x) = \tan x \ , \ f'(x) = \sec^2 x$

$\therefore \int (\tan x)^6 \ \underline{\sec^2 x \ dx}$

تهمل

$\therefore \frac{(\tan x)^7}{7} + c \Rightarrow \frac{\tan^7 x}{7} + c$

تكامل الدوال المثلثية التربيعية

قوانين وقواعد رئيسية تفيدنا في تكاملات الدوال المثلثية التربيعية

القواعد الذهبية

1) $\sin^2 x + \cos^2 = 1$
2) $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
3) $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

قوانين ضعف الزاوية

1) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
3) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
4) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
5) $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

بشرط المقام $\neq 0$

قوانين نصف الزاوية

1) $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
2) $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

تكـامـلات الـدوال الـتـربـيـعـيـة

1) $\int \sec^2 \theta \ d\theta = \tan \theta + c$

2) $\int \csc^2 \theta \ d\theta = -\cot \theta + c$

3) $\int \tan^2 \theta \ d\theta = \int (\sec^2 \theta - 1) \ d\theta$

$= \int \sec^2 \theta \ d\theta - \int d\theta$

$= \tan \theta - \theta + c$

حسب القاعدة الذهبية

$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

$\Rightarrow \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$

4) $\int \cot^2\theta\, d\theta = \int(\csc^2\theta - 1)\, d\theta$
$= \int \csc^2\theta\, d\theta - \int d\theta$
$= -\cot\theta - \theta + c$

حسب القاعدة الذهبية
$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
$\Rightarrow \cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$

5) $\int \sin^2\theta\, d\theta = \int(\frac{1-\cos 2\theta}{2})\, d\theta$
$= \int \frac{1}{2} d\theta - \int \frac{1}{2}\cos 2\theta\, d\theta$
$= \frac{1}{2}\int d\theta - \frac{1}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta$
$= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 2\theta) + c$
$= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$

حسب القانون
$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$
ويمكن تجزأة البسط على المقام
$\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$

6) $\int \cos^2\theta\, d\theta = \int(\frac{1+\cos 2\theta}{2})\, d\theta$
$= \int \frac{1}{2} d\theta + \int \frac{1}{2}\cos 2\theta\, d\theta$
$= \frac{1}{2}\int d\theta + \frac{1}{2}\int \cos 2\theta\, d\theta$
$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 2\theta) + c$
$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$

حسب القانون
$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$
ويمكن تجزأة البسط على المقام
$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$

امثلة

جد التكاملات لكل مما يأتي :

1) $\int 9\sin 3x\, dx$

$= 9\int \sin 3x\, dx$
$= 9\left(\frac{1}{3}(-\cos 3x)\right) dx$
$= -3\cos 3x + c$

2) $\int x^2 \sin x^3\, dx$

الزاوية هي x^3 مشتقتها هي $3x^2$ موجود منها x^2
إذن نحتاج أن نضرب ونقسم على 3
$= \frac{3}{3}\int x^2\sin x^3\, dx$
$= \frac{1}{3}\int \underline{3x^2}\sin x^3\, dx$
تهمل

في حالة اذا كان جزء من مشتقة الزاوية موجود بالقرب من الدالة الدائرية فنحاول اكمال مشتقة الزاوية ومن ثم اهمالها واعتماد تكامل الدوال المثلثية الاعتيادية لكن بدون وضع (١ على مشتقة الزاوية) قبل التكامل

اذن نكامل الدالة الدائرية فقط ونهمل مشتقة الزاوية

$= \frac{1}{3}(-\cos x^3) + c = \frac{-1}{3}\cos x^3 + c$

3) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\ dx$

عند تغيير صورة الجذر إلى قوة كسرية تتحول الدالة بالشكل الآتي : $\int (1-\sin 2x\ dx)^{\frac{1}{2}} dx$

ولتكاملها يجب توفر مشتقة داخل القوس وهذا غير ممكن.

إذن يجب التخلص نهائياً من الجذر وذلك بتحويل المقدار داخل الجذر إلى مربع كامل

∴ حسب القاعدة الذهبية نحول (1) إلى $(\sin^2 x+\cos^2 x)$

وحسب قانون ضعف الزاوية لـ $(\sin 2x)$ نحوله إلى $(2\sin x\cos x)$

$$= \int \sqrt{(\sin^2 x+\cos^2 x)-2\sin x\cos x}\ dx$$
$$= \int \sqrt{\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x}\ dx$$
$$= \int \sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\ dx$$

$\sqrt{(\text{جذر الحد الاول} - \text{جذر الحد الاخير})^2}$

$$= \int \mp(\sin x-\cos x)\ dx$$

$\sqrt{a^2}=\mp a$

$$= \mp\left[\int \sin x\,dx-\int \cos x\ dx\right]$$
$$= \mp[-\cos x-\sin x]+c$$
$$= \mp[-(\cos x+\sin x)]+c$$
$$= \pm(\cos x+\sin x)+c$$

4) $\int \sin^4 x\ dx$

$$= \int (\sin^2 x)^2\ dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x\right) dx$$

تحليل مربع حدانية

$$= \int \left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right)\right] dx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int \cos 2x\ dx+\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int \cos 4x\ dx$$
$$= \frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 4x\right)+c$$
$$= \frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$$
$$= \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$$

5) $\int (\sin x-\cos x)^7(\cos x+\sin x)\ dx$

مشتقة داخل القوس هي $\cos x+\sin x$

$$\therefore \int \underbrace{(\sin x-\cos x)}_{f(x)}{}^7\underbrace{(\cos x+\sin x)}_{f'(x)\ \text{تهمل}}\ dx = \frac{(\sin x-\cos x)^8}{8}+c$$

6) $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}\, dx$

$= \int \tan^{-3} x\,(1+\tan^2 x)\, dx$

$1+\tan^2 x = \sec^2 x$

$\therefore \int \underbrace{\tan^{-3} x}_{f(x)}\ \underbrace{\sec^2 x}_{f'(x)}\ dx$

$\therefore \frac{\tan^{-2} x}{-2} + c = \frac{-1}{2\tan^2 x} + c$

طريقة أخرى للحل : نجزأ البسط على المقام

$\frac{1}{\tan x} = \cot x \Rightarrow \frac{1}{\tan^3 x} = \cot^3 x$

$\int \left(\frac{1}{\tan^3 x} + \frac{\tan^2 x}{\tan^3 x}\right) dx$

$= \int (\cot^3 x + \cot x)\ dx$

$\cot^2 + 1 = \csc^2\ x$

$= \int \cot x\ (\cot^2 + 1)\, dx$

$= \int \cot x\ \csc^2 x\ dx$

مشتقة $\cot x$ هي $-\csc^2 x$, نحتاج (-1) اذن نضرب ونقسم على (−١)

$= -\int \underbrace{\cot x}_{f(x)}\ \underbrace{(-\csc^2 x)}_{f'(x)\text{ تهمل}}\ dx = \frac{-\cot^2 x}{2} + c$

7) $\int \cos^3 x\ dx$

الدالة المثلثية مرفوعة إلى قوة فردية إذن يجب تجزأتها بالشكل الاتي: $\int \cos x\ \cos^2 x\ dx$

حسب القاعدة الذهبية $\cos^2\ x = 1 - \sin^2 x$

$= \int \cos x\,(1 - \sin^2) dx$

$= \int (\cos x - \sin^2 x \cos x)\, dx$

$= \int \cos x\ dx - \int \underbrace{\sin^2 x}_{f(x)}\ \underbrace{\cos x}_{\grave{f}(x)}\ dx$

$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$

8) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx$

$= \int \tan\ x\ \frac{1}{\cos^2 x}\ dx$

$\frac{1}{\cos x} = \sec x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$= \int \underbrace{\tan x}_{f(x)}\ \ \underbrace{\sec^2 x}_{f'(x)\text{ تهمل}}\ dx$

$= \frac{\tan^2 x}{2} + c$

طريقة ثانية للحل

$= \int \tan\ x\ \frac{1}{\cos^2 x}\ dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$= \int \cos^{-3} x \ \sin x \ dx = \int (\cos x)^{-3} \ \sin x \ dx$$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

نحتاج ان نضرب ونقسم على (١-)

$$= -\int \cos^{-3} x \ (-\sin x) \ dx$$

$$= -\frac{\cos^{-2} x}{-2} + c = \frac{1}{2\cos^2 x} + c$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

9) $\int \sin 6x \ \cos^2 3x \ dx$

$$= \int (2 \sin 3x \cos 3x) \cos^2 3x \ dx$$

$= \int 2 \sin 3x \ \cos^3 3x \ dx$ عند الضرب تجمع الاسس

مشتقة $\cos 3x$ هي $-3 \sin 3x$ موجود منها $\sin 3x$

نحتاج -3 ∴ نضرب ونقسم على -3

$$= \frac{-3}{-3} \int 2 \sin 3x \ \cos^3 3x \ dx$$

$$= \frac{2}{-3} \int \underbrace{-3 \sin 3x}_{f'(x) \text{ تهمل}} \ \underbrace{\cos^3 3x}_{f(x)} \ dx$$

$$= \frac{-2}{3} \left(\frac{\cos^4 3x}{4} \right) + c$$

$$= \frac{-2}{12} \cos^4 3x + c \Rightarrow \frac{-1}{6} \cos^4 x + c$$

نوحد الزوايا وذلك باستخدام القانون التالي

$\because \sin 2x = 2 \sin x \ \cos x$

$\therefore \sin 6x = 2 \sin 3x \cos 3x$

10) $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} \ dx$

$$= \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} \ dx$$

$$= \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{(\cos 2x - \sin 2x)} \ dx$$

$$= \int (\cos 2x + \sin 2x) \ dx$$

$$= \int \cos 2x \ dx + \int \sin 2x \ dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + c$$

$\because \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\therefore \cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

نعوض في البسط وذلك لتوحيد الزوايا مع المقام لنتمكن من عمليه الاختصار

11) $\int \sin^2 3x \; dx$

$= \int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 6x\right) dx$

$= \int \frac{1}{2}\, dx - \int \frac{1}{2}\cos 6x \; dx$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x\right) + c$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$\therefore \; \sin^2 3x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6x$

12) $\int \cot^2 5x \; dx$

$= \int (\csc^2 5x - 1) dx$

$= \int \csc^2 5x \; dx - \int dx$

$= -\frac{1}{5}\cot 5x - x + c$

$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

$\cot^2 5x = \csc^2 5x - 1$

13) $\int \tan^2 7x \; dx$

$= \int (sec^2 7x - 1)\, dx$

$= \int \sec^2 7x\, dx - \int dx$

$= \frac{1}{7}\tan 7x - x + c$

$\tan^2 x + 1 = sec^2 x$

$\tan^2 7x = sec^2 7x - 1$

تمارين [4 – 4]

جد التكاملات لكل مما يأتي ضمن مجال الدالة

1) $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\, dx$

الطريقة الاولى : تحليل البسط إلى فرق بين مربعين

$= \int \frac{[(2x^2-3)-3]\,[(2x^2-3)+3]}{x^2}\, dx$

$= \int \frac{(2x^2-3-3)(2x^2\cancel{-3}\cancel{+3})}{x^2}\, dx$

$= \int \frac{(2x^2-6)(2x^2)}{x^2}\, dx$

$= \int \frac{4x^4-12x^2}{x^2}\, dx$

$= \int \frac{4x^4}{x^2}\, dx - \int \frac{12x^2}{x^2}\, dx$

$= \int 4x^2 dx - \int 12\, dx \Rightarrow \frac{4x^3}{3} - 12x + c$

الطريقة الثانية : تحليل القوس مربع حدانية

$= \int \frac{4x^4 - 12x^2 \cancel{+9} \cancel{-9}}{x^2}\, dx$

$= \int \frac{4x^4 - 12x^2}{x^2}\, dx$

$= \int \left(\frac{4x^4}{x^2} - \frac{12x^2}{x^2}\right) dx$

$= \int (4x^2 - 12)\; dx$

$= \frac{4x^3}{3} - 12x + c$

2) $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}} dx$

$$= \int \frac{(3-\sqrt{5}\sqrt{x})^7}{\sqrt{7}\sqrt{x}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{\left(3-\sqrt{5}\, x^{\frac{1}{2}}\right)^7}{x^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \int x^{\frac{-1}{2}} \left(3-\sqrt{5}\, x^{\frac{1}{2}}\right)^7 dx$$

مشتقة داخل القوس هي $-\frac{\sqrt{5}}{2}x^{\frac{-1}{2}}$ ، نحتاج $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ⇐ نضرب ونقسم على $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{-1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \int \frac{-\sqrt{5}}{2} x^{\frac{-1}{2}} \left(3-\sqrt{5}\, x^{\frac{1}{2}}\right)^7 dx$$

تهمل $f'(x)$ $f(x)$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{5}} \frac{(3-\sqrt{5x})^8}{8} + c$$

$$= \frac{-2}{8\sqrt{35}} (3-\sqrt{5x})^8 + c = \frac{-1}{4\sqrt{35}} (3-\sqrt{5x})^8 + c$$

3) $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} dx$

نجزأ $\cos^3 x$ إلى $\cos^2 x \ \cos x$

$$= \int \frac{\cos x \cos^2 x}{1-\sin x} dx$$

$$= \int \frac{\cos x\,(1-\sin^2 x)}{(1-\sin x)} dx$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$= \int \frac{\cos x(1+\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)} dx$$

$$= \int (\cos x + \cos x \sin x) dx$$

$$= \int \cos x \ dx + \int \sin x \ \cos x \ dx$$

$f(x)$ $f'(x)$تهمل

$$= \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

4) $\int \csc^2 x \cos x \, dx$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} \cos x \ dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$= \int cscx \ \cot x \, dx$

$= -\csc x + c$

طريقة أخرى

$= \int \frac{1}{\sin^2} \cos x \, dx$

$= \int \underbrace{\sin^{-2} x}_{f(x)} \ \underbrace{\cos x}_{f'(x)} \ dx$

$= \frac{\sin^{-1} x}{-1} + c = \frac{-1}{\sin x} + c = -cscx + c$

5) $\int \frac{x}{(3x^2+5)^4} \, dx$

$= \int x (3x^2 + 5)^{-4} dx$

مشتقة داخل القوس هي $6x$ اذن نحتاج ان نضرب ونقسم على 6

$= \frac{1}{6} \int \underbrace{6x}_{f'(x)} \underbrace{(3x^2 + 5)}_{f(x)}^{-4} \, dx$

$= \frac{1}{6} \ \frac{(3x^2+5)^{-3}}{-3} + c$

$= \frac{-1}{18(3x^2+5)^3} + c$

6) $\int \sqrt[3]{x^2 + 10x + 25} \ \ dx$

نحول الدالة تحت الجذر الى قوس مرفوع للتربيع وذلك لعدم وجود دالة اخرى بجانب الجذر فلا نستطيع تكاملها بقاعدة الدالة ومشتقتها

$= \int \sqrt[3]{(x + 5)^2} \, dx$

$= \int (x + 5)^{\frac{2}{3}} \, dx$

مشتقة داخل القوس هي (1) وهي موجودة دائماً

$= \frac{(x+5)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5} \ \sqrt[3]{(x + 5)^5} + c$

7) $\int \sin^3 x \, dx$

$= \int \sin x \ \sin^2 x \ dx$

$= \int \sin x \, (1 - \cos^2 x) \, dx$ حسب القاعدة الذهبية الاولى

$= \int (\sin x - \cos^2 x \sin x) \ dx$

$= \int \sin x\, dx - \int \cos^2 x\ \sin x\, dx$

مشتقة $cosx$ هو $-\sin x$ اذن نحتاج ان نضرب ونقسم على (-1)

$= \int \sin x\ dx - (-) \int cos^2 x(-\sin x)dx$ تهمل

$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$

8) $\int \frac{\cos \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\, dx$

$= \int \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \cos\ (1-x)^{\frac{1}{2}}\ dx$

الزاوية هي $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ مشتقتها هي $\frac{1}{2}(1-x)^{\frac{-1}{2}}(-1) = \frac{-1}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}}$

∴ نضرب ونقسم على $\frac{-1}{2}$ حتى نوجد مشتقة الزاوية

$= \frac{1}{\frac{-1}{2}} \int \frac{-1}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}} \cos \sqrt{1-x}\ dx$

$\acute{f}(x)$ $f(x)$

$= -2 \sin \sqrt{1-x} + c$

∵ مشتقة الزاوية متواجدة
∴ نكامل الدالة الدائرية مباشرة
وفق جدول التكاملات الاساسي

9) $\int (3x^2+1)^2 dx$

نفك القوس مربع حدانية

$= \int (9x^4 + 6x^2 + 1)\, dx$

$= \frac{9x^5}{5} + \frac{6x^3}{3} + x + c$

$= \frac{9}{5}x^5 + 2x^3 + x + c$

10) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\, dx$

نسحب $\sqrt{x}$ عامل مشترك تحت الجذرفي البسط

$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{\sqrt[4]{x^3}}\, dx$

$= \int \frac{x^{\frac{1}{4}}(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}}\, dx$

$= \int x^{\frac{-3}{4}}\ x^{\frac{1}{4}}\,(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}\, dx$

$= \int x^{\frac{-2}{4}}\left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} dx$ عند الضرب تجمع الاسس

$$= \int x^{\frac{-1}{2}} \left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

مشتقة داخل القوس هي $-\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$ نحتاج ان نضرب ونقسم على $-\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{\frac{-1}{2}} \int \underbrace{\frac{-1}{2} x^{\frac{-1}{2}}}_{f'(x)} \underbrace{\left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}_{f(x)} dx$$

$$= -2 \frac{(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{-4}{3} \sqrt{(1-\sqrt{x})^3} + c$$

11) $\int (1 + \cos 3x)^2 dx$

$$= \int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x)\, dx$$

$$= \int [1 + 2\cos 3x + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x)]\, dx$$

$$= x + 2\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x\right) + c$$

$$= x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

12) $\int \sec^2 4x\, dx$

$$= \frac{1}{4}\tan 4x + c$$

13) $\int \csc^2 2x\, dx$

$$= \frac{1}{2}(-\cot 2x) + c \Rightarrow \frac{-1}{2}\cot 2x + c$$

14) $\int \tan^2 8x\, dx$

$$= \int (\sec^2 8x - 1) dx$$

$$= \int \sec^2 8x\, dx - \int dx$$

$$= \frac{1}{8}\tan 8x - x + c$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \tan^2 8x = \sec^2 8x - 1$$

15) $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1 - \cos^2 2x}\, dx$

$$= \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{\sin^2 2x}\, dx$$ حسب القاعدة الذهبية الاولى

$$= \int \frac{1}{\sin^2 2x}\sqrt{\cot 2x}\, dx$$

$$= \int \csc^2 2x\, (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

مشتقة داخل القوس هي $-2\csc^2 2x$ اذن نضرب ونقسم على -2

$$= \frac{-1}{2}\int \underbrace{-2\csc^2 2x}_{f'(x)}\ \underbrace{(\cot 2x)^{\frac{1}{2}}}_{f(x)}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2}\cdot\frac{(\cot 2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(\cot 2x)^3} + c = \frac{-1}{3}\sqrt{(\cot 2x)^3} + c$$

16) $\int \cos^2 2x\,dx$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\,dx + \int \frac{1}{2}\cos 4x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x$$

17) $\int \sin^2 8x\ dx$

$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 16x\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{1}{2}\cos 16x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\sin 16x\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{32}\sin 16x + c$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\sin^2 8x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 16x$$

18) $\int \cos^4 3x\ dx$

$$= \int (\cos^2 3x)^2\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos^2 6x\right) dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 6x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 12x\right)\right] dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\,dx + \int \frac{1}{2}\cos 6x\ dx + \int \frac{1}{8}\,dx + \int \frac{1}{8}\cos 12x\ dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x\right) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{12}\sin 12x\right) + c$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{96}\sin 12x + c$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + c$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^2 3x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x$$

$$\cos^2 6x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 12x$$

اللوغارتم الطبيعي

درسنا دوالاً مألوفة نوعاً ما، فكثيرات الحدود والدوال النسبية وغيرها من الدوال الجبرية تنتج عن عمليات مألوفة في الحساب والجبر ويمكن مطابقة قيم الدوال المثلثية بإحداثيات نقط على دائرة الواحدة، أما الآن فندرس دالة اللوغارتم الطبيعي التي تعتمد على حساب التفاضل والتكامل حتى في تعريفها.

تعريف : يعرف لوغارتم x الطبيعي ، ويرمز له بـ $(ln\, x)$ بأنه :

$$ln\, x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \;\; ; \;\; \forall x > 0 \ldots\ldots\ldots..(1)$$

يمثل هذا التكامل لكل x أكبر من 1 ، المساحة المحدودة من الأعلى بالمنحني $y = \frac{1}{t}$ ومن الأسفل بالمحور t ومن اليسار بالمستقيم $t = 1$ ومن اليمين بالمستقيم $t = x$

أي إذا كان $x = 1$ تطابق الحدان الأيمن والايسر للمساحة وأصبحت المساحة صفراً .

$$ln\, 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0 \qquad \left(\int_a^a f = 0\right)$$

أما إذا كانت x أصغر من 1 وأكبر من الصفر فعندئذ يكون الحد الأيسر هو المستقيم $t = x$ ، والحد الأيمن هو $t = 1$ وفي هذه الحالة يكون التكامل :

$$ln\, x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt$$

مساوياً للقيمة السالبة للمساحة تحت المنحني بين x و 1

وفي كل الحالات ، x عدداً مركباً موجباً ، فإنه يمكن حساب قيمة التكامل المحدد في المعادلة (1) إلى أي عدد نرغب فيه من الأرقام العشرية كما مر بنا في حساب المساحة تحت المنحني بالتقريب .

وبما أن الدالة $F(x) = ln\, x$ معرفة بالتكامل

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \, , \; \forall\, x > 0$$

فإنه من المبرهنة الأساسية لحساب التكامل نعلم أن : $F'(x) = \frac{1}{x}$

أي أن $\frac{d}{dx}(ln\, x) = \frac{1}{x}$

كما يمكننا الحصول على صيغة أعم عندما يكون لدينا $ln u$ حيث u دالة موجبة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x فقاعدة السلسلة للمشتقات $(chain\ Rule)$ تعطينا

$$\frac{d}{dx}(ln\, u) = \frac{d\,(ln\, u)}{du}\,\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(ln\, u) = \frac{1}{u}\,\frac{du}{dx} \Rightarrow d(ln\, u) = \frac{1}{u}\, du$$

مثال إذا كان $y = ln\,(3x^2 + 4)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

مشتقة دالة $ln = \frac{1}{\text{الدالة}} *$ مشتقة الدالة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2+4}(6x)$$
$$= \frac{6x}{3x^2+4}$$

أمثلة جد $\frac{du}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $y = ln\,(x \sin x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \sin x}\,[\,x \cos x + sinx\,(1)]$$

(مشتقة حاصل ضرب دالتين)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cos x + \sin x}{x \sin x}$$

2) $ln\,(xy) = 2x$

$$\left[\frac{1}{x\,y}\left(x\frac{dy}{dx} + y\,(1)\right) = 2\,\right] * xy$$

(أشتقاق ضمني)

$$x\frac{dy}{dx} + y = 2xy$$
$$x\frac{dy}{dx} = 2xy - y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy-y}{x}$$

ملاحظة : $\because d\,(ln\,u) = \frac{1}{u}\ \ du$

$$\int \frac{1}{u}\,\mathbf{du} = ln\,|u| + c$$

مثال جد : $\int \frac{cos\theta\ d\theta}{1+\sin\theta}$

$$\because u = 1 + \sin\theta \implies \frac{du}{d\theta} = \cos\theta\ \ d\theta$$

$$\therefore \int \frac{\cos\theta\ d\theta}{1+\sin\theta} = \int \frac{du}{u} = ln\,|u| + c$$

$$= ln\,|1 + sin\theta| + c$$

ملاحظة : $\because$ الدالة في المقام ومشتقتها في البسط

$\therefore$ تكاملها سيكون $ln\,|\text{المقام}| + c$

أمثلـة

جد التكاملات لكل مما يأتي:

1) $\int_1^4 \frac{x}{x^2+2}\, dx$

$u = x^2 + 2 \quad , \quad \grave{u} = 2x$

∴ نحتاج العدد 2 في البسط ⇐ نضرب ونقسم على 2

$= \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{2x}{x^2+2}\, dx$

$= \frac{1}{2} [\, ln\,|x^2 + 2|\,]_1^4$

$= \frac{1}{2} [\, ln\,|(4)^2 + 2| - In\,|(1)^2 + 2|]$

$= \frac{1}{2} [\, ln\, 18 - In\, 3]$

$= \frac{1}{2} \left[ln\, \frac{18}{3} \right]$

$= \frac{1}{2}\, ln\, 6$

حسب خواص ln والتي هي نفس خواص log نسحب ln عامل مشترك ونحول عملية الطرح بين العددين الى قسمة

2) $\int \frac{ln\,(x)}{x}\, dx$

$= \int ln\, x \left(\frac{1}{x}\right) dx$ يمكن كتابة الدالة بالصيغة الاتية

الدالة هي $ln\, x$ مشتقتها هي $\frac{1}{x}$ اذن نكامل وفق قاعدة دالة ومشتقتها فتهمل المشتقة ونكامل الدالة وذلك بأضافة (١) الى الاس والتقسيم على الاس الجديد

$= \int \underbrace{ln\, x}_{f(x)} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{f'(x)} dx$ تهمل

$= \frac{[\, ln\, x]^2}{2} + c$

3) $\int \frac{1+ln\, x}{x}\, dx$

$= \int \left[\frac{1}{x} + ln\, x \left(\frac{1}{x}\right)\right] dx$ نجزأ البسط على المقام

$= \int \frac{1}{x}\, dx + \int \underbrace{ln\, x}_{f(x)} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\acute{f}(x)} dx$

$= ln\, |x| + \frac{(ln\, x)^2}{2} + c$

4) $\int \frac{[\, ln\,(x)\,]^3}{x}\, dx$

$= \int \underbrace{[\, ln\,(x)\,]^3}_{f(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)}\, dx = \frac{[\, ln\,(x)\,]^4}{4} + c$

5) $\int \frac{2x}{5x^2+1}\,dx$

$u = 5x^2 + 1 \ , \ u' = 10x$

نحتاج أن نضرب البسط بـ (5) حتى نحصل على u' ∴ نضرب ونقسم على 5

$= \frac{1}{5} \int \frac{10x}{5x^2+1}\,dx$

$= \frac{1}{5} ln\,|5x^2 + 1| + c$

دالة اللوغارتم الطبيعي

لتكن $y = ln\,x$

لو أبدلنا y, x في مجموعة الأزواج المرتبة $\{(x, y) : y = ln\,x \ , \ x > 0\}$

لحصلنا على دالة نرمز لها $x = ln^{-1}(y) \ , \ (y > 0 \ , \ x \in R\}$

ويكون مجال $ln^{-1}(y)$ هو مدى $ln\,(x)$

نتيجة : الدالة الأساسية e^x (أساس e) هي عكس دالة اللوغارتيم الطبيعي وتستنتج جميع خواصها من هذه

تعريف : $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

البرهان : لتكن $y = e^x$

$\therefore x = ln\,y \Rightarrow 1 = \frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = y = e^x$

وبصورة عامة

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u . \frac{du}{dx}$$

مثال لتكن $y = e^{\tan x}$ جد $\frac{dy}{dx}$

مشتقة $e^{\text{الاس}} = e^{\text{الاس}}$ x مشتقة الاس

$\frac{dy}{dx} = e^{\tan x}\, sec^2 x$

الدالة مشتقة الاس

أمثلة

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل من :

1) $y = e^{x^2+2x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+2x}\ (2x+2)$$
$$= (2x+2)\ e^{x^2+2x}$$

2) $y = \sin x\ e^x$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x\ e^x(1) + e^x \cos x$$ مشتقة حاصل ضرب دالتين
$$= \sin x\ e^x + \cos x\ e^x$$
$$= e^x(\sin x + \cos x)$$

3) $y = e^x\ ln\ x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x\left(\frac{1}{x}\right) + lnx\ e^x(1)$$ مشتقة حاصل ضرب دالتين
$$= \frac{1}{x}\ e^x + lnx\ e^x$$
$$= e^x\left(\frac{1}{x} + ln\,x\right)$$

4) $y = e^{x^2+\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+sinx}\ (2x + \cos x)$$
$$= (2x+\cos x)\ e^{x^2+sinx}$$

ملاحظة : إن صيغة التفاضل $d\,(e^u) = e^u\,\frac{du}{dx}$

تقودنا إلى صيغة التكامل $\int e^u\,du = e^u + c$

ملاحظة : إذا كانت الدالة e^u ومشتقة الأس du موجودة ∴ التكامل يكون $e^u + c$

– في حالة إذا كانت المشتقة ناقصة نحاول إيجادها من ثم نهمل المشتقة و تكامل.

مثال جد $\int x e^{x^2} dx$

الدالة هي e^{x^2} ، مشتقة الأس هي $2x$ ∴ نحتاج 2 نضرب ونقسم على 2

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{\text{مشتقة الأس}} \; \underbrace{e^{x^2}}_{\text{الدالة}} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

امثلة

1) $\int e^{\ln(x^2+5)} \, dx$

$$= \int e^{\ln(x^2+5)} \, dx$$

e يحذف الـ (ln) وبالعكس

$$= \int (x^2+5)\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 5x + c$$

2) $\int e^{x^4} \; x^3 \, dx$

الدالة هي e^{x^4} ، مشتقة الأس هي $4x^3$ ∴ نحتاج 4 ⇐ نضرب ونقسم على 4

$$= \frac{1}{4}\int \underbrace{e^{x^4}}_{\text{الدالة}} \; \underbrace{(4x^3)}_{\text{مشتقة الدالة}} \, dx$$

$$= \frac{1}{4} e^{x^4} + c$$

3) $\int \frac{e^x}{(e+e^x)^2} \, dx$

$$= \int e^x (e+e^x)^{-2} \, dx$$ نرفع المقام إلى البسط

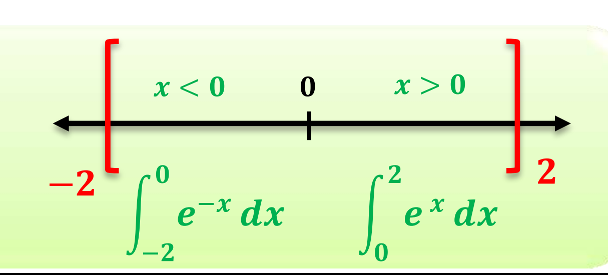
نبحث مشتقة داخل القوس ⇐ $\frac{d}{dx}(e+e^x) = e^1(0) + e^x(1) = e^x$

$$\therefore \int \underbrace{e^x}_{f'(x)} \underbrace{(e+e^x)}_{f(x)}{}^{-2} \, dx$$

$$= \frac{(e+e^x)^{-1}}{-1} + c \Rightarrow \frac{-1}{e+e^x} + c$$

4) $\int_{-2}^{2} e^{|x|} \, dx$

$$e^{|x|} = \begin{cases} e^x & x \ge 0 \\ e^{-x} & x < 0 \end{cases}$$



$$\int_{-2}^{2} e^{|x|} dx = \int_{-2}^{0} e^{-x} \, dx + \int_{0}^{2} e^{x} \, dx$$

$= -\int_{-2}^{0} -e^{-x} + \int_{0}^{2} e^{x}\, dx$

$= -[e^{-x}]_{-2}^{0} + [e^{x}]_{0}^{2}$

$= -[e^{0} - e^{2}] + [e^{2} - e^{0}]$

$= -[\,1 - e^{2}] + [e^{2} - 1]$

$= -1 + e^{2} + e^{2} - 1$

$= 2e^{2} - 2$

$= 2(e^{2} - 1)$

$e^{0} = 1$

5) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}\, dx$

الدالة هي $e^{x^{\frac{1}{2}}}$ ، مشتقة الأس هي $\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\therefore$ نحتاج ان نضرب ونقسم على $\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}} \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}} dx$

مشتقة الاس

$= 2\, e^{\sqrt{x}} + c$

تعريف : إذا كان a عدداً موجباً ، فإن $a^{u} = e^{u\, \ln a}$

الدالة الاسية للاساس a

[يمكن تحويل الدالة الأسية للأساس a إلى دالة اللوغارتم الطبيعي e وذلك باستخدام الصيغة السابقة]

مبرهنة : $\frac{da^{u}}{dx} = a^{u} \,.\, \frac{du}{dx}\ \ \ln a$

$\frac{da^{u}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{u \ln a}\right)$

$= e^{u \ln a} . \frac{d}{dx}\ (u \ln a)$

$\therefore \frac{da^{u}}{dx} = a^{u} . \frac{du}{dx}\ \ \ln a$

ملاحظة: مشتقة الدالة الأسية للأساس a هي = الدالة نفسها × مشتقة الأس × (الأساس)

مثال جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

$a)\ y = 3^{2x-5}$

$$\frac{dy}{dx} = 3^{2x-5}\,(2)\,\ln 3$$
$$= (2\ln 3)\,3^{2x-5}$$

$b)\ y = 2^{-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2^{-x^2}(-2x)\,\ln 2$$
$$= (-2x\ \ln 2)\,2^{-x^2}$$

$c)\ y = 5^{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = 5^{\sin x}(\cos x)\,\ln 5$$
$$= (\cos x\ \ln 5)\ 5^{\sin x}$$

ملاحظة : يمكن تحويل a^u إلى $e^{u\ln a}$ ونتبع قواعد الاشتقاق والتكامل لـ (e)

مثلا : $y = 2^{3x+1}$ نحوله إلى e بالشكل التالي

$$y = e^{(3x+1)\ln 2}$$
$$\frac{dy}{dx} = e^{(3x+1)\ln 2}\ (3\ln 2)$$

من ثم نعيده إلى الصيغة a^u

$$= (3\ln 2)\ 2^{(3x+1)}$$

تمارين $[4-5]$

١- جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

$a)\ y = \ln 3x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\not{3}x}\,(\not{3}) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$b)\ y = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$y = \ln\left(\frac{1}{2}\ x\right)$ يمكن كتابة الدالة بالشكل الاتي

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$c)\ y = \ln(x^2)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}(2x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$

$d)\ y = (\ln x)^2$

حسب قاعدة مشتقة قوس مرفوع إلى قوة

$\frac{dy}{dx} = 2\ (\ln x)\ .\frac{1}{x}$ مشتقة داخل القوس

$\frac{dy}{dx} = \frac{2\ln x}{x}$

$e)\ y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^3$

$y = \ln\frac{1}{x^3} \Rightarrow y = \ln x^{-3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^{-3}}(-3x^{-4})$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^3}{x^4} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{x}$

$f)\ y = \ln(2 - \cos x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2-\cos x}\ [-(-\sin x)]$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2-\cos x}$

$g)\ y = e^{-5x^2+3x+5}$

$\frac{dy}{dx} = e^{-5x^2+3x+5}(-10x+3)$

$= (-10x+3)\ e^{-5x+3x+5}$

$h)\ y = 9^{\sqrt{x}}$

$y = (3^2)^{\sqrt{x}}$ يجب تبسط المقدار

$y = 3^{2x^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{dy}{dx} = 3^{2x^{\frac{1}{2}}}\left(2\left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right)\right)\ln 3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3^{2\sqrt{x}}\ \ln 3}{\sqrt{x}} = \frac{9^{\sqrt{x}}\ln 3}{\sqrt{x}}$

$i)\ y = 7^{\frac{-x}{4}}$

$y = 7^{\frac{-1}{4}x}$

$\frac{dy}{dx} = 7^{\frac{-1}{4}x}\left(\frac{-1}{4}\right)\ln 7 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\ln 7}{4\left(7^{\frac{1}{4}x}\right)}$

$j)\ y = x^2e^x$

$\frac{dy}{dx} = x^2e^x(1) + e^x(2x)$ مشتقة حاصل ضرب دالتين

$= x^2e^x + 2x\,e^x$

$= xe^x(x+2)$

٢– جد التكاملات الآتية :

$a)\ \int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx$

$\because$ مشتقة المقام هي (1) موجودة في البسط

$\therefore \int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = [\,\ln|x+1|\,]_0^3 = \ln|3+1| - \ln|0+1|$

$= \ln 4 - \ln 1$ $\qquad \ln 1 = 0$

$= \ln 4 - 0$

$= \ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2$

$b)\ \int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx$

مشتقة المقام هي $2x$ موجودة في البسط

$\therefore \int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx = [\ln|x^2+9|]_0^4$

$= \ln|(4)^2+9| - \ln|(0)^2+9|$

$= \ln|16+9| - \ln|9|$

$= ln|25| - ln|9|$

$= ln\left|\frac{25}{9}\right| \Rightarrow ln\frac{(5)^2}{(3)^2}$

$= ln\left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow 2\,ln\frac{5}{3}$

c) $\int_{ln\,3}^{ln\,5} e^{2x}\,dx$

يجب تواجد مشتقة الأس وهي 2 ∴ نضرب ونقسم على 2

$= \frac{1}{2}\int_{ln\,3}^{ln\,5} \underset{\acute{f}(x)}{\underline{2}}\ \underset{f(x)}{\underline{e^{2x}}}\,dx$

$= \frac{1}{2}[\,e^{2x}]_{ln\,3}^{ln\,5} = \frac{1}{2}[\,e^{2\,ln\,5} - e^{2\,ln\,3}]$

$= \frac{1}{2}[e^{ln\,5^2} - e^{ln\,3^2}]$ $\qquad e^{ln} = 1$

$= \frac{1}{2}[\,5^2 - 3^2] = \frac{1}{2}[25-9] \Rightarrow \frac{1}{2}(16) = 8$

d) $\int_{0}^{ln\,2} e^{-x}\,dx$

مشتقة الأس هي (-1) ∴ نضرب ونقسم على -1

$= -\int_{0}^{ln\,2} \underset{\acute{f}(x)}{\underline{-}}\ \underset{f(x)}{\underline{e^{-x}}}\,dx$

$= -[e^{-x}]_0^{\ln 2} = -[e^{-\,ln\,2} - e^0]$ $\qquad e^0 = 1$

$= -[e^{ln\,2^{-1}} - 1]$

$= -[\frac{1}{2} - 1]$

$= -\left[\frac{-1}{2}\right] = \frac{1}{2}$

e) $\int_0^1 (1+e^x)^2\, e^x\,dx$

مشتقة داخل القوس هي e^x

$= \int_0^1 \underset{f(x)}{\underline{(1+e^x)}}\ \underset{f'(x)}{\underline{e^x}}\,dx$

$= [\frac{(1+e^x)^3}{3}]_0^1 = \frac{(1+e)^3}{3} - \frac{(1+e^0)^3}{3}$

$= \frac{(1+e)^3}{3} - \frac{(1+1)^3}{3}$

$= \frac{(1+e)^3}{3} - \frac{8}{3} = \frac{(1+e)^3-8}{3}$

$f)\ \int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}\,dx$

مشتقة المقام هي $3x^2+4$ موجودة في البسط

$\therefore \int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}\,dx = [\,ln\,|x^3+4x+1|\,]_0^1$
$= ln|(1)^3+4(1)+1| - ln|(0)^3+4(0)+1|$
$= ln|6| - ln|1|$
$= ln|6| - 0 = ln\,6$

$g)\ \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$

$= \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}}dx$

مشتقة الأس هي $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (تهمل)

$\therefore = [\,e^{\sqrt{x}}]_1^4 \Rightarrow e^{\sqrt{4}} - e^1 \Rightarrow e^2 - e \Rightarrow e(e-1)$

$h)\ \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sec^2 x}{2+\tan x}\,dx$

مشتقة المقام هي $\sec^2 x$ موجودة في البسط $\therefore$ تهمل

$= [\,ln|2+\tan x|\,]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$
$= ln\left|2+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| - ln\left|2+\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right|$
$= ln|2+1| - ln|2-1|$
$= ln|3| - ln|1|$
$= ln|3| - 0 = ln\,3$

إشارة الربع الرابع لـ tan هي سالبة

$i)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{-1}{2}} \cos x\ dx$

مشتقة داخل القوس هي $\cos x$ $\therefore$ تهمل

$= \left[\frac{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2[\,\sqrt{\sin x}\,]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow 2\left[\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right]$

$$= 2\left[\sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right] = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$$

$j)\ \int \cot^3 5x\ dx$

$$= \int \cot 5x\ \cot^2 5x\ dx$$
$$= \int \cot 5x\ (\csc^2 5x - 1)\ dx$$
$$= \int \cot 5x\ \csc^2 5x\ dx - \int \cot 5x\ dx$$

$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x \Rightarrow \cot^2 5x = \csc^2 5x - 1$

مشتقة $\cot 5x$ هي $-5\csc^2 5x$ $\therefore$ نضرب ونقسم على -5

$$= -\frac{1}{5}\int \underbrace{\cot 5x}_{f(x)}\ \underbrace{(-5\csc^2 5x)}_{f'(x)\text{ تهمل}}\ dx - \frac{1}{5}\int 5\ \frac{\cos 5x}{\sin 5x}\ dx$$

$\cot 5x = \dfrac{\cos 5x}{\sin 5x}$

$$= -\frac{1}{5}\ \frac{\cot^2 5x}{2} - \frac{1}{5}\ ln|\sin 5x| + c$$
$$= -\frac{1}{10}\cot^2 5x - \frac{1}{5}\ ln|\sin 5x| + c$$

$k)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\ \sin x\ dx$

مشتقة الأس هي $-\sin x$ $\therefore$ نضرب ونقسم على -1

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\ (-\sin x)\ dx$$
$$= -[\,e^{\cos x}\,]_0^{\frac{\pi}{2}} = -[\,e^{\cos\frac{\pi}{2}} - e^{\cos 0}]$$
$$= -[\,e^0 - e^1] = -[1 - e] = e - 1$$

$L)\ \int_1^2 x\ e^{-ln\,x}\ dx$

$$= \int_1^2 x\ e^{ln\ x^{-1}}\ dx$$
$$= \int_1^2 x\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2\ dx = [\,x\,]_1^2$$
$$= 2 - 1 = 1$$

3) أثبت أن **$a)\ \int_1^8 \dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x} - 1}}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx = 2$**

$$L.H.S = \int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x} - 1}}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx = \int_1^8 (x^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}}\ x^{\frac{-2}{3}}\ dx$$

مشتقة داخل القوس هي $\frac{1}{3}\ x^{\frac{-2}{3}}$ $\therefore$ نضرب ونقسم على $\frac{1}{3}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{3}}} \int_1^8 \underbrace{\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}_{f(x)} \underbrace{\left(\frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}\right)}_{f'(x)} dx$$

$$= 3 \left[\frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^8 = 3\left(\frac{2}{3}\right)\left[\sqrt{(\sqrt[3]{x} - 1)^3}\right]_1^8$$

$$= 2\left[\sqrt{(\sqrt[3]{8} - 1)^3} - \sqrt{(\sqrt[3]{1} - 1)^3}\right]$$

$$= 2\left[\sqrt{(2-1)^3} - \sqrt{(1-1)^3}\right] = 2[\sqrt{1} - \sqrt{0}] = 2(1) = 2 = R.H.S$$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

b) $\int_{-2}^{4} |3x - 6| \, dx = 30$

$L.H.S = \int_{-2}^{4} |3x - 6| \, dx$

$3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$ الحد الفاصل

$$|3x - 6| = \begin{cases} 3x - 6 & x \geq 2 \\ 6 - 3x & x < 2 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{4} |3x - 6| \, dx = \int_{-2}^{2} (6 - 3x)dx + \int_{2}^{4} (3x - 6)\, dx$$

$$= \left[6x - \frac{3x^2}{2}\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3x^2}{2} - 6x\right]_2^4$$

$$= \left[\left(6(2) - \frac{3(2)^2}{2}\right) - \left(6(-2) - \frac{3(-2)^2}{2}\right)\right] + \left[\left(\frac{3(4)^2}{2} - 6(4)\right) - \left(\frac{3(2)^2}{2} - 6(2)\right)\right]$$

$$= [(12 - 6) - (-12 - 6)] + [(24 - 24) - (6 - 12)]$$

$$= [6 + 18] + [0 + 6]$$

$= 30 = R.H.S$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

4) $f(x)$ **دالة مستمرة على الفترة** $[-2, 6]$ **فإذا كان** $\int_1^6 f(x)\, dx = 6$ **وكان** $\int_{-2}^{6} [f(x) + 3]dx = 32$ **فجد** $\int_{-2}^{1} f(x)\, dx$

$$\int_{-2}^{6} [f(x) + 3]dx = \int_{-2}^{1} (f(x) + 3)dx + \int_1^6 (f(x) + 3)dx$$

بإضافة 3 إلى حدود الطرف الأيمن

$$\int_{-2}^{6} (f(x) + 3)dx = \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{-2}^{1} 3\, dx + \int_1^6 f(x)dx + \int_1^6 3\, dx$$

$32 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + [\,3x\,]_{-2}^{1} + 6 + [\,3x\,]_{1}^{6}$

$32 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + 3[1-(-2)] + 6 + 3[6-1]$

$32 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + 9 + 6 + 15$

$32 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + 30$

$\int_{-2}^{1} f(x)dx = 32 - 30$

$\int_{-2}^{1} f(x)dx = 2$

5) جد قيمة $a \in R$ إذا علمت أن : $\int_{1}^{a} \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$

$\int_{1}^{a} \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\ dx$

$\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_{1}^{a} = 2\,[\,\tan x\,]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$\left(\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}\,a\right) - \left(\frac{(1)^2}{2}+\frac{1}{2}\,(1)\right) = 2\,[\tan(\frac{\pi}{4}) - \tan(0)]$

$\frac{a^2+a}{2} - 1 = 2\,[1-0]$

$\frac{a^2+a}{2} = 2+1$

$\frac{a^2+a}{2} = 3 \Rightarrow a^2 + a = 6 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0$

$(a+3)(a-2) = 0$

أما $a+3=0 \Rightarrow a=-3 \ < 1$ يهمل (لان $-3 < 1$ وهذا غير ممكن)

أو $a-2=0 \Rightarrow a=2 \ > 1$

∴ فترة التكامل هي $[1,2]$

6) لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in R$ ، دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) جد $\int_{1}^{3} f(x)\, dx$

∵ للدالة نهاية صغرى ⟸ $f'(x) = 0$

$f'(x) = 2x + 2$

$2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$

∴ نقطة النهاية الصغرى هي $(-1,-5)$

∵ $(-1,-5) \in$ للدالة ∴ تتحقق المعادلة

$f(x) = x^2 + 2x + k$

$-5 = (-1)^2 + 2(-1) + k$

$-5 = 1 - 2 + k$

$-5 = -1 + k$

$k = -5 + 1 \Rightarrow k = -4$

$\therefore f(x) = x^2 + 2x - 4$

$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^2 + 2x - 4)\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 4x\right]_1^3$

$= \left(\frac{(3)^3}{3} + (3)^2 - 4(3)\right) - \left(\frac{(1)^3}{3} + (1)^2 - 4(1)\right)$

$= (9 + 9 - 12) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 4\right)$

$= 6 - \left(\frac{1-9}{3}\right)$

$= 6 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3}$

7) إذا كان للمنحني $f(x) = (x-3)^3 + 1$ نقطة أنقلاب (a, b) جد القيمة العددية للمقدار

$\int_0^b f'(x)\,dx - \int_0^a f''(x)\,dx$

نجد نقطة انقلاب وذلك من المشتقة الثانية

$f'(x) = 3(x-3)^2$

$f''(x) = 6(x-3)$

$[6(x-3) = 0] \div 6 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$y = f(3) = (3-3)^3 + 1 \Rightarrow y = 1$

$\therefore (3,1)$ نقطة انقلاب

$\therefore a = 3 \ , \ b = 1$

$\int_0^b f'(x)\,dx - \int_0^a f''(x)dx$

$= \int_0^1 3(x-3)^2\,dx - \int_0^3 6(x-3)\,dx$

$= 3\int_0^1 (x^2 - 6x + 9)\,dx - 6\int_0^3 (x-3)dx$

$= 3\left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 9x\right]_0^1 - 6\left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_0^3$

$= 3\left[\left(\frac{(1)^3}{3} - 3(1)^2 + 9(1)\right) - \left(\frac{(0)^3}{3} - 3(0)^2 + 9(0)\right)\right] - 6\left[\left(\frac{(3)^2}{2} - 3(3)\right) - \left(\frac{(0)^2}{2} - 3(0)\right)\right]$

$= 3\left[\left(\frac{1}{3} - 3 + 9\right) - 0\right] - 6\left[\left(\frac{9}{2} - 9\right) - 0\right]$

$= 3\left(\frac{19}{3}\right) - 6\left(\frac{-9}{2}\right) = 19 + 27 = 46$

يمكن تكامل الدالتين وفق قاعدة الدالة ومشتقتها وذلك لأن مشتقة الدالة هي (١)

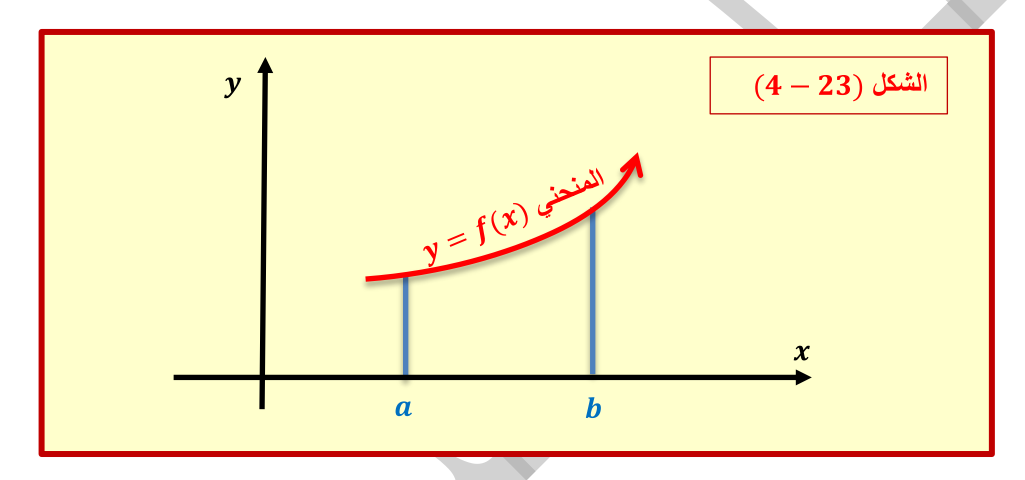
إيجاد مساحة المنطقة المستوية

مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني ومحور السينات

لتكن $y = f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ ولتكن A مساحة المنطقة التي يحدها منحني الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = a \ , \ x = b$

إذا كانت $f(x) > 0$ فإن مساحة A تساوي : $A = \int_a^b f(x)\ dx$

إذا كانت $f(x) < 0$ فإن مساحة A تساوي : $A = -\int_a^b f(x)\ dx$



وعندما يقطع منحني الدالة $y = f(x)$ محور السينات في $x = a , x = b$ نتبع الخطوات الآتية:

خطوات إيجاد المساحة عندما f تمتلك قيم موجبة وقيم سالبة على الفترة $[a,b]$

١ − نجد النقاط عندما $f(x) = 0$

٢ − نستخدم قيم x التي تجعل $f = 0$ كموقع على $[a,b]$ لتحصل على فترات جزئية من $[a,b]$

٣ − نجري عملية التكامل على كل فترة جزئية.

٤ − نجمع القيم المطلقة للتكاملات في الخطوة (3).

مثال جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات على الفترة $[-2,2]$

الخطوة الأولى : نستخرج قيم x من الدالة وذلك بجعل $f(x) = 0$

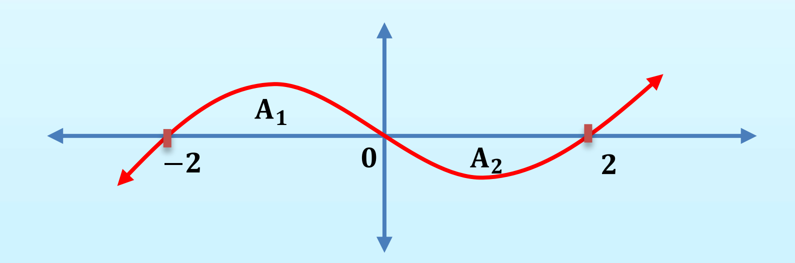
$\therefore x^3 - 4x = 0$

$x(x^2 - 4) = 0$

$x(x-2)(x+2) = 0$

أما $x = 0$, أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$, أو $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

الخطوة الثانية : إيجاد فترات التكامل وهي $[-2,0], [0,2]$



الخطوة الثالثة : إيجاد تكامل المنطقتين A_1, A_2

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\ dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$= 0 - \left(\frac{16}{4} - 8\right) = -(4-8) = 4$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\ dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{0}^{2} = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= \left(\frac{16}{4} - 8\right) - 0 = 4 - 8 = -4$$

الخطوة الرابعة: جمع القيم المطلقة للتكاملات $A = |A_1| + |A_2|$

$$= |4| + |-4| = 4 + 4 = 8\ unit^2$$

مثال

جد مساحة المنطقة التي يحدها مخطط الدالة $y = x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x = 1\ ,\ x = 3$

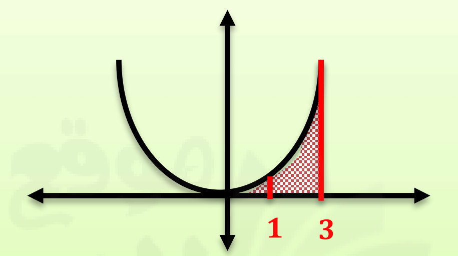
نجد الفترة من المستقيمان ⟸ فترة السؤال هي $[1,3]$

نقاط التقاطع مع محور السينات

$f(x) = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,3]$

∴ لايوجد تجزئة لفترة التكامل



$$A = \int_{1}^{3} f(x)\ dx = \int_{1}^{3} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\ \frac{2}{3}\ unit^2$$

مثال

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات

نبحث عن نقاط التقاطع مع محور السينات

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x(x-2)(x-1) = 0$

أما $x = 0$ أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

∴ فترات التكامل هي $[0,1],[1,2]$

$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^1$

$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - 0 = \frac{1}{4}$

$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_1^2$

$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2 = \left(\frac{16}{4} - 8 + 4\right) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) = 0 - \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}$

$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ unit^2$

مثال جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2,3]$

نجد نقاط التقاطع مع محور السينات

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0$

أما $x = 1 \in [-2,3]$

أو $x = -1 \in [-2,3]$

∴ فترة التكامل تتجزأ إلى الفترات

$[-2,-1]\,,\ [-1,1]\,,\ [1,3]$

$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} = \left(\frac{-1}{3} + 1\right) - \left(\frac{-8}{3} + 2\right)$

$= \frac{2}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

$A_2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{-1}{3} + 1\right)$

$= \frac{-2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{3}$

$A_3 = \int_1^3 (x^2 - 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3 = \left(\frac{27}{3} - 3\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$

$= (9 - 3) - \left(\frac{-2}{3}\right) = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$

$A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$

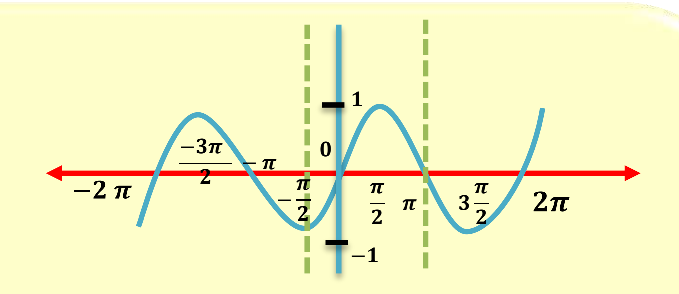
$= \left|\frac{3}{4}\right| + \left|\frac{-4}{3}\right| + \left|\frac{20}{3}\right| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}\ unit^2$

مثال جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \sin x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[\frac{-\pi}{2}\ ,\ \pi\right]$

نجد نقاط التقاطع مع محور السينات وعلى الفترة $\left[\frac{-\pi}{2}, \pi\right]$

$\therefore \sin x = 0 \Rightarrow x = 0\,,\ \pi\,, 2\pi\,, -\pi\,, -2\pi$

الزوايا التي تجعل $\sin x = 0$ هي الزوايا الزوجية من دائرة الوحدة وفي هذا السؤال اخذنا القيم الموجبة والسالبة للزوايا وذلك لأن فترة السؤال من السالب الى الموجب



$x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ يجزأ

$x = \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ لا يجزأ

$x = 2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$x = -\pi \notin \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$x = -2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

اذا كانت قيم x هي بداية الفترة او نهايتها فتكون تنتمي للفترة لكن لا تجزأها اما اذا كانت خارج الفترة فهي لاتنتمي للفترة ولاتجزأها فقط في حالة اذا كانت داخل الفترة فهي تجزأ الفترة

∴ فترات التكامل هي $\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right], [0, \pi]$

$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x \; dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -\cos(0) + \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1 + 0 = -1$$

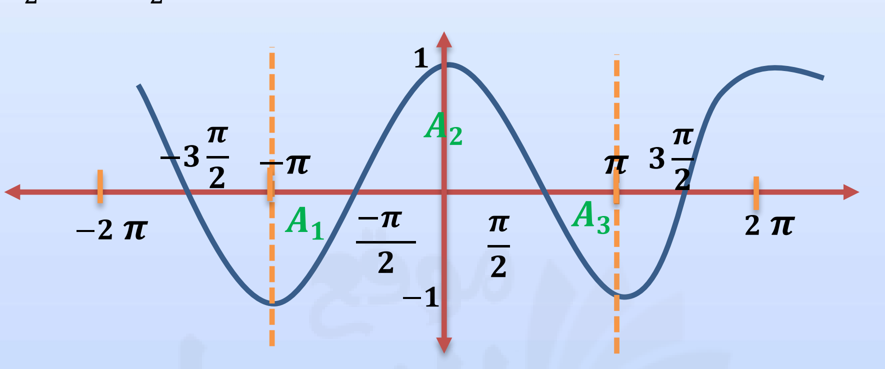
$$A_2 = \int_{0}^{\pi} \sin x \; dx = [-\cos x]_{0}^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$$

$$A = |A_1| + |A_2| = |-1| + |2| = 1 + 2 = 3 \; unit^2$$

مثال جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi, \pi]$

نجد نقاط التقاطع مع محور السينات

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, -3\frac{\pi}{2}$



$x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$ تجزأ

$x = \frac{-\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$ تجزأ

$x = 3\frac{\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$

$x = -3\frac{\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$

∴ فترات التكامل هي $\left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right]\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$A_1 = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin(-\pi)$$

$$= -\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi = -1 + 0 = -1$$

$$A_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$$

$$A_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \; dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

$$= |-1| + |2| + |-1| = 1 + 2 + 1 = 4 \; unit^2$$

مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين

سبق وأن درسنا كيفية إيجاد المساحة بين منحني دالة ومحور السينات ومستقيمين والآن سندرس كيفية إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين:

لتكن $f(x), g(x)$ دالتين مستمرتين على الفترة $[a,b]$ فإن مساحة المنطقة A المحصورة بين المنحنيين نجدها كما يأتي :

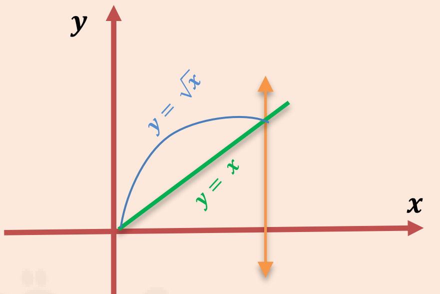
١- إذا كان $f(x) > g(x)$ في الفترة $[a,b]$ فالمساحة A هي $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$.

٢- إذا كانت $f(x) < g(x)$ في الفترة $[a,b]$ فالمساحة A هي $A = -\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

إذا تقاطع المنحنيان بين $[a,b]$ نجد نقاط التقاطع وذلك بجعل $f(x) = g(x)$ ثم نجد قيم x التي تنتمي إلى (a,b) وبتجزئة $[a,b]$ إلى فترات جزئية ثم نجد تكامل الفرق بين الدالتين في كل فترة جزئية ثم بعد ذلك نجد مجموع مطلق التكاملات والتي تمثل المساحة المطلوبة.

مثال جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$

نجد تقاطع المنحنيين وذلك بمساواة المنحني الاول مع المنحني الثاني



$\sqrt{x} = x$ بتربيع الطرفين للتخلص من الجذر

$\therefore x = x^2 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Longrightarrow x(x-1) = 0$

اما $x = 0$

او $x = 1$

اذن فترة التكامل هي $[0,1]$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(1)^3} - \frac{(1)^2}{2}\right] - [0]$$

$$= \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{6}$$

$$\therefore\ A = \left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}\ unit^2$$

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$

$x^3 = x$ نجد تقاطع الدالتين

$x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$x(x-1)(x+1) = 0$

$x = 0\ ,\ x = 1\ ,\ x = -1$

$\therefore$ فترات التكامل هي $[-1,0]\ ,\ [0,1]$

$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$

$= -\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

$A_2 = \int_{0}^{1} (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{-1}{4}$

$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ \ unit^2$

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيين $g(x) = \sin x\ ,\ f(x) = \cos x$ وعلى الفترة $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

نجد تقاطع المنحنيين بالقسمة على $\cos x$ $\ \sin x = \cos x\ ]$

$\therefore \tan x = 1$

$\because \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$x = \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore$ فترات التكامل هي $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

دالة التكامل هي دالة طرح المنحني الاول من المنحني الثاني او العكس

$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx = [\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= (\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) - (\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right))$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-1 + 0)$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2} + 1$

$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)dx = [\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= (\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}) - \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)$

$= (1 + 0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$

$A = |A_1| + |A_2| = \left|\sqrt{2} + 1\right| + \left|1 - \sqrt{2}\right|$

$= \sqrt{2} + \cancel{1} + \sqrt{2} - \cancel{1} = 2\sqrt{2}\ \ unit^2$

المســـافـــــــة

لتكن $V\ (t)$ سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وفي مستوٍ فإن المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$

هي : $d = \int_{t_1}^{t_2} |V\ (t)|\ dt$

حيث d تمثل المسافة ، المسافة كمية غير متجهة أما الإزاحة والسرعة والتعجيل فإن كلاً منها كمية متجهة لذا

فإن الإزاحة (S) : $S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\ dt$

الازاحة $S(t)$ ← اشتقاق ← السرعة $V(t)$ ← اشتقاق ← التعجيل $a(t)$

المسافة $d(t)$

$$V(t) = \grave{S}(t)\ ,\ a(t) = \grave{V}(t)$$

اما في حالة التكامل فتكون العملية عكسيه أي ان :

$$V(t) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\ dt\ ,\ S(t) = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\ dt\ ,\ d(t) = \int_{t_1}^{t_2} |V(t)|\ dt$$

مثال جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $[\ V(t) = 2t - 4\ \ m/s\ ]$ فجد :

a) المسافة المقطوعة في الفترة $[1, 3]$

b) الإزاحة المقطوعة في الفترة $[1, 3]$

c) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة.

d) بعده بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة.

a) لإيجاد المسافة المقطوعة يجب بحث هل إن الجسم يغير اتجاهه وذلك بجعل $V(t) = 0$ واستخراج قيم t من الدالة وهذه العملية نقوم بها فقط في حالة طلب المسافة مع فترة زمنية $[a\ , b]$

$\therefore 2t - 4 = 0 \Rightarrow 2t = 4 \Rightarrow t = 2\ \in [1,3]$

من الواضح ان الجسم يغير اتجاهه $\therefore$ الفترات هي $[1,2], [2,3]$

$\therefore d = \left|\int_1^2 (2t - 4)\ dt\right| + \left|\int_2^3\ (2t - 4)\ dt\right|$

$= \left|\left[\frac{2t^2}{2} - 4t\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{2t^2}{2} - 4t\right]_2^3\right| = |\ [t^2 - 4t]_1^2| + |\ [t^2 - 4t]_2^3|$

$= |[(4 - 8) - (1 - 4)]| + |[(9 - 12) - (4 - 8)]|$

$= |[-4 + 3| + |-3 + 4| = |-1| + |1| = 1 + 1 = 2m$

$b)\ S = \int_1^3 (2t-4)\,dt = \left[\frac{2t^2}{2} - 4t\right]_1^3 = [t^2-4t]_1^3$
$= (9-12)-(1-4) = -3+3 = 0$

$c)\ d = \left|\int_4^5 (2t-4)\,dt\right| = \left|\left[\frac{2t^2}{2} - 4t\right]_4^5\right| = \left|[t^2-4t]_4^5\right|$
$= |(25-20)-(16-16)|$
$= |5-0| = |5| = 5\ m$

عندما يطلب في السؤال في الثانية الخامسة فتكون الفترة من القيمه القبل العدد المطلوب الى العدد المطلوب اي ان الفترة تكون من 4 الى 5

$d)\ S = \int_0^4 (2t-4)dt$
$= [t^2-4t]_0^4 = [16-16]-0 = 0\ m$

اذا كان مطلب السؤال بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة فهذا معناه ان الفترة تكون من 0 الى 4 لأن بدء الحركة معناه ان الزمن يساوي 0

مثال جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18)m/s^2$ فإذا كانت سرعته قد أصبحت $(82)m/s$ بعد مرور 4 ثواني من بدء الحركة جد:

a) المسافة خلال الثانية الثالثة.

b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثواني.

لايجاد دالة السرعة نكامل دالة التعجيل تكامل غير محدد

$V(t) = \int a(t)\,dt$
$V(t) = \int 18\,dt$
$V(t) = 18t + c \ldots\ldots(1)$

لايجاد قيمة c نعوض $t = 4\ ,V(t) = 82$ في (1)

$82 = 18(4) + c$
$82 = 72 + c \Rightarrow c = 82-72 \Rightarrow c = 10$
$\therefore V(t) = 18t + 10$ دالة السرعة

$a)\ d = \left|\int_2^3 (18t+10)\,dt\right| = \left|\left[\frac{18t^2}{2} + 10t\right]_2^3\right|$
$= |\,[9t^2+10t]_2^3\,| = |9(3)^2+10(3)| - |9(2)^2+10(2)|$
$= |81+30| - |36+20|$
$= |111| - |56| = 111 - 56 = 55\ m$

$b)\ S = \int_0^3 (18\,t+10)\,dt$
$= [9t^2+10t]_0^3$
$= [9(3)^2+10(3)] - 0$
$= 81+30 = 111\ m$

تمارين [4 – 6]

١–جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = -1$, $x = 1$

نجد نقاط التقاطع مع محور السينات

$y = 0 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$

أما $x = 0$ أو $x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$,

$x = 0 \in [-1,1]$ يجزأ

$x = 1 \in [-1,1]$ لا يجزأ (لان نهاية الفترة)

∴ الفترات هي $[-1,0]\,,[0,-1]$

$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - x)\,dx$

$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{7}{10}\right) = \frac{7}{10}$

$A_2 = \int_{0}^{1} (x^4 - x)dx = [\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}]_0^1 = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) - 0 = -\frac{3}{10}$

$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{7}{10}\right| + \left|-\frac{3}{10}\right| = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1\ unit^2$

٢– جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ وعلى الفترة $[-2,3]$ ومحور السينات.

نجد نقاط التقاطع مع محور السينات $f(x) = 0$

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$

أما $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \mp 2$

او $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \notin R$ يهمل

$x = 2 \in [-2,3]$ يجزأ

$x = -2 \in [-2,3]$ لا يجزأ (لان بداية الفترة)

∴ الفترات هي $[-2,2], [\,2,3]$

$A_1 = \int_{-2}^{2} (x^4 - 3x^2 - 4)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} - 4x]_{-2}^{2}$

$= \left(\frac{32}{5} - 8 - 8\right) - \left(\frac{-32}{5} + 8 + 8\right)$

$= \left(\frac{32}{5} - 16\right) - \left(-\frac{32}{5} + 16\right)$

$= \left(\frac{32-80}{5}\right) - \left(\frac{-32+80}{5}\right) = -\frac{48}{5} - \frac{48}{5}$

$= -\frac{96}{5}$

$A_2 = \int_2^3 (x^4 - 3x^2 - 4)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} - 4x\right]_2^3$

$= \left(\frac{243}{5} - 27 - 12\right) - \left(\frac{32}{5} - 8 - 8\right)$

$= \left(\frac{243}{5} - 39\right) - \left(\frac{32-80}{5}\right)$

$= \frac{48}{5} - \left(-\frac{48}{5}\right) = \frac{96}{5}$

$A = |A_1| + |A_2|$

$= \left|-\frac{96}{5}\right| + \left|\frac{96}{5}\right| = \frac{96}{5} + \frac{96}{5} = \frac{192}{5} = 38\frac{2}{5}\ unit^2$

٣- جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات

نجد التقاطع مع محور السينات $f(x) = 0$

$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$

$x^2(x-1)(x+1) = 0$

$x = 0\,,\ x = 1\,,\ x = -1$

∴ الفترات هي $[-1,0]\ ,\ [0,1]$

$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - x^2)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)$

$= -\left(\frac{-3+5}{15}\right) = -\frac{2}{15}$

$A_2 = \int_0^1 (x^4 - x^2)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) - 0$

$= \frac{3-5}{15} = -\frac{2}{15}$

$A = |A_1| + |A_2| = \left|-\frac{2}{15}\right| + \left|-\frac{2}{15}\right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\ unit^2$

٤- جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

التقاطع مع محور السينات $y = 0$

$\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = 0, \pi, 2\pi$ نأخذ القيم الموجبة للزوايا فقط لان فترة السؤال موجبة

$3x = 0 \Rightarrow x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ لا تجزأ

$3x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ تجزأ

$3x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad 2\frac{\pi}{3} = 120 > 90$

∴ الفترات هي $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\ ,\ \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x)\, dx = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= -\frac{1}{3}\left[\cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos 3\,(0)\right] = -\frac{1}{3}[\cos\pi - \cos 0]$

$= -\frac{1}{3}[-1-1] = -\frac{1}{3}(-2) = \frac{2}{3}$

$A_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (sin3x)dx = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{1}{3}\left[\cos 3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= -\frac{1}{3}[0+1] = -\frac{1}{3}$

$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{2}{3}\right| + \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1\ unit^2$

٥- جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

التقاطع مع محور السينات $y = 0$

$2\cos^2 x - 1 = 0$

$\because 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$ [قانون ضعف الزاوية لـ cos]

$\therefore \cos 2x = 0$

$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ تجزأ

$2x = 3\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 3\frac{\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $3\frac{\pi}{4} = 135 > 90$

$\therefore$ الفترات هي $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x)\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2}\left[\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 2\,(0)\right] = \frac{1}{2}\left[sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] = \frac{1}{2}[1-0] = \frac{1}{2}$

$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x)\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left[\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2}$

$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\ unit^2$

٦- جد المساحة المحددة بالدالتين $y=\sqrt{x-1}$, $y=\frac{1}{2}x$ وعلى الفترة $[2,5]$

نجد تقاطع المنحنيين

$\sqrt{x-1}=\frac{1}{2}x$ بتربيع الطرفين

$x-1=\frac{1}{4}x^2$

$\frac{1}{4}x^2-x+1=0\ ]*4$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)(x-2)=0$

$x-2=0 \Rightarrow x=2\in[2,5]$ لا تجزأ

∴ فترة التكامل هي $[2,5]$

$A=\int_2^5\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}x\right)dx$

دالة التكامل هي دالة طرح المنحني الاول من الثاني او العكس

$=\int_2^5(x-1)^{\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{2}\int_2^5 x\ dx$

$=\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^5-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5$

$=\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x-1)^3}\right]_2^5-\frac{1}{4}[x^2]_2^5$

$=\frac{2}{3}\left[\sqrt{(5-1)^3}-\sqrt{(2-1)^3}\right]-\frac{1}{4}[(5)^2-(2)^2]$

$=\frac{2}{3}[\sqrt{64}-\sqrt{1}]-\frac{1}{4}[25-4]$

$=\frac{2}{3}[8-1]-\frac{1}{4}[21]$

$=\frac{2}{3}(7)-\frac{1}{4}(21)=\frac{14}{3}-\frac{21}{4}=\frac{56-63}{12}=\frac{-7}{12}$

$A=|A|=\left|\frac{-7}{12}\right|=\frac{7}{12}\ unit^2$

٧- جد المساحة المحددة بالدالتين $y=x^4-12$, $y=x^2$

نجد التقاطع بين المنحنيين

$x^4-12=x^2$

$x^4-x^2-12=0$

$(x^2-4)(x^2+3)=0$

تهمل $\notin R$

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\mp 2$

∴ فترة التكامل هي $[-2,2]$

$A = \int_{-2}^{2}(x^4 - x^2 - 12)dx = [\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 12x]_{-2}^{2}$

$= \left[\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24\right] - \left[-\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 24\right]$

$= \left(\frac{96-40-360}{15}\right) - \left(\frac{-96+40+360}{15}\right)$

$= \left(\frac{56-360}{15}\right) - \left(\frac{-56+360}{15}\right)$

$= \frac{-304}{15} - \frac{304}{15} = \frac{-608}{15}$

$A = \left|\frac{-608}{15}\right| = \frac{608}{15}\ unit^2$

٨-جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin x \cos x$ حيث $x \in [0, 2\pi]$

نجد تقاطع المنحنيين $\sin x\ \cos x = \sin x$

$\sin x \cos x - \sin x = 0$

$\sin x\,(\cos x - 1) = 0$

أما $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$

$x = 0 \in [0, 2\pi]$ لا يجزأ

$x = \pi \in [0,2\pi]$ يجزأ

$x = 2\pi \in [0,2\pi]$ لا يجزأ

أو $\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$

$x = 0 \in [0,2\pi]$ لا يجزأ

$x = 2\pi \in [0,2\pi]$ لا يجزأ

∴ الفترات هي $[0,\pi], [\pi, 2\pi]$

$A_1 = \int_0^{\pi} (\underbrace{\sin x}_{f(x)}\ \underbrace{\cos x}_{f'(x)} - \sin x)dx$

$= \left[\frac{\sin^2 x}{2} + \cos x\right]_0^{\pi}$

$= \left(\frac{1}{2}(\sin\pi)^2 + \cos\pi\right) - \left(\frac{1}{2}(\sin 0)^2 + \cos 0\right)$

$= (\frac{1}{2}(0) + (-1)) - \left(\frac{1}{2}(0) + 1\right) = -1 - 1 = -2$

$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} (\sin x \cos x - \sin x)dx$

$= \left[\frac{\sin^2 x}{2} + \cos x\right]_{\pi}^{2\pi}$

$= \left(\frac{1}{2}(\sin 2\pi)^2 + \cos 2\pi\right) - \left(\frac{1}{2}(\sin\pi)^2 + \cos\pi\right)$

$= \left(\frac{1}{2}(0)+1\right) - \left(\frac{1}{2}(0)+(-1)\right)$

$= 1-(-1) = 1+1 = 2$

$A = |A_1| + |A_2| = |-2| + |2| = 2+2 = 4 \quad unit^2$

٩- جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = 2\sin x + 1$, $g(x) = \sin x$

حيث $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

نجد تقاطع المنحنيين $2\sin x + 1 = \sin x$

$2\sin x + 1 - \sin x = 0$

$\sin x + 1 = 0$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ لا تجزأ

∴ فترة التكامل هي $\left[0, 3\frac{\pi}{2}\right]$

$A = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1)\, dx$

$= [-\cos x + x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) - (-\cos 0 + 0)$

$= \left(0 + \frac{3\pi}{2}\right) - (-(1)+0) = \frac{3\pi}{2} + 1 = \frac{3\pi+2}{2}$

$A = |A| = \left|\frac{3\pi+2}{2}\right| = \frac{3\pi+2}{2} \quad unit^2$

١٠- جد المساحة المحددة بالدالة $y = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات

نجد التقاطع مع محور السينات $\Leftarrow y = 0$

$\Rightarrow x^3 + 4x^2 + 3x = 0$

$x(x^2 + 4x + 3) = 0$

$x(x+3)(x+1) = 0$

اما $x = 0$

أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

∴الفترات هي $[-3,-1]$, $[-1,0]$

$A_1 = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{-1}$

$= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2}\right)$

$= \left(\frac{3-16+18}{12}\right) - \left(\frac{243-432+162}{12}\right) = \frac{5}{12} - \left(-\frac{27}{12}\right) = \frac{5+27}{12} = \frac{32}{12}$

$$A_2 = \int_{-1}^{0} (x^3+4x^2+3x)dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$
$$= 0-\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3-16+18}{12}\right) = -\frac{5}{12}$$
$$A = |A_1|+|A_2| = \left|\frac{32}{12}\right|+\left|-\frac{5}{12}\right| = \frac{32}{12}+\frac{5}{12} = \frac{37}{12} \ unit^2$$

١١ − جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $(V(t)=3t^2-6t+3)\ m/s$ أحسب:

a) المسافة المقطوعة في الفترة $[2,4]$

b) الإزاحة في الفترة $[0,5]$

a) نجعل $V(t)=0$ وذلك لبحث هل إن الجسم يغير اتجاهه.

$3t^2-6t+3=0\ ]\div 3$

$t^2-2t+1=0$

$(t-1)(t-1)=0 \Rightarrow t-1=0 \Rightarrow t=1 \notin [2,4]$

∴ الجسم لا يغير اتجاهه اذن ستكون فترة واحدة للتكامل

$$d = \left|\int_2^4 (3t^2-6t+3)\,dt\right|$$
$$d = \left|\left[\frac{3t^3}{3}-\frac{6t^2}{2}+3t\right]_2^4\right| = \left|\left[t^3-3t^2+3t\right]_2^4\right|$$
$= |(64-48+12)-(8-12+6)| = |28-2| = |26| = 26\ m$ المسافة

b) $S = \int_0^5 (3t^2-6t+3)\,dt$

$$= \left[\frac{3t^3}{3}-\frac{6t^2}{2}+3t\right]_0^5 = \left[t^3-3t^2+3t\right]_0^5$$
$= (125-75+15)-0 = 65\ m$ الإزاحة

١٢ − جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $(90)m/s$ احسب:

a) السرعة عندما $t=2$

b) المسافة خلال الفترة $[1,2]$

c) الإزاحة بعد (10) ثواني من بدء الحركة

يجب إيجاد دالة السرعة من تكامل دالة التعجيل:

$\therefore V(t) = \int a(t)\,dt$

$V(t) = \int (4t+12)\,dt$

$$V(t) = \frac{4\,t^2}{2} + 12t + c$$
$$V(t) = 2t^2 + 12t + c \;\ldots\ldots\ldots(1)$$

لإيجاد قيمة c نعوض $t = 4\,,\ v(t) = 90$

$90 = 2(4)^2 + 12(4) + c$
$90 = 32 + 48 + c$
$90 = 80 + c \Rightarrow c = 90 - 80 \Rightarrow c = 10$ نعوض في (١)

$V(t) = 2t^2 + 12t + 10$ دالة السرعة

a) لإيجاد السرعة عندما $t = 2$

$v(2) = 2(2)^2 + 12(2) + 10$
$v(2) = 8 + 24 + 10$
$v(2) = 42m/s$

b) لإيجاد المسافة يجب جعل $v(t) = 0$ وذلك لبحث تغير اتجاه الجسم

$v(t) = 0 \Rightarrow 2t^2 + 12t + 10 = 0] \div 2$
$t^2 + 6t + 5 = 0$
$(t+5)(t+1) = 0$

اما $t = -5$ تهمل (لا يوجد زمن سالب)

أو $t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$ يهمل (نفس السبب)

∴ الجسم لا يغير اتجاهه

$$d = \left|\int_1^2 (2t^2 + 12t + 10)\,dt\right|$$
$$d = \left|\left[2\frac{t^3}{3} + 12\frac{t^2}{2} + 10\,t\right]_1^2\right| = \left|\left[\frac{2}{3}t^3 + 6t^2 + 10t\right]_1^2\right|$$
$$= \left|\left(\frac{2}{3}(8) + 6(4) + 10(2)\right) - \left(\frac{2}{3} + 6 + 10\right)\right|$$
$$= \left|\left(\frac{16}{3} + 24 + 20\right) - \left(\frac{2}{3} + 16\right)\right|$$
$$= \left|\left(\frac{16+132}{3}\right) - \left(\frac{2+48}{3}\right)\right|$$
$$= \left|\frac{148}{3} - \frac{50}{3}\right| = \left|\frac{98}{3}\right| = \frac{98}{3}\ m$$

c) لإيجاد الإزاحة بعد 10 ثواني من بدء الحركة اذن فترة التكامل هي [0,10]

$$S = \int_0^{10} (2t^2 + 12t + 10)\,dt$$
$$S = \left[\frac{2t^3}{3} + \frac{12t^2}{2} + 10t\right]_0^{10}$$
$$S = \left[2\frac{(1000)}{3} + 6(100) + 10(10)\right] - 0 \Longrightarrow S = \frac{2000}{3} + 600 + 100 = \frac{4100}{3}m$$

١٣ – تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)\ m/s$ أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة إلى موضعها الأول الذي بدأت منه . ثم أحسب التعجيل عندها

$v(t) = 100t - 6t^2$

لإيجاد الإزاحة التي تحركتها النقطة نكامل $v(t)$

$s(t) = \int (100t - 6t^2)\ dt$

$s(t) = \frac{100t^2}{2} - \frac{6t^3}{3} + c$

$s\ (t) = 50t^2 - 2t^3 + c\ \ldots\ldots(1)$

∵النقطة تتحرك من السكون $\Leftarrow s(t) = 0\ ,\ t = 0$ ، نعوض في (١)

$0 = 50(0) - 2(0) + c \Rightarrow c = 0$

$\therefore s(t) = 50t^2 - 2t^3$

عودة النقطة إلى موضعها الأصلي معناه إن النقطة تعود إلى السكون وهذا يعني إن $s(t) = 0$

$[0 = 50t^2 - 2t^3] \div 2$

$0 = 25t^2 - t^3$

$t^2(25 - t) = 0$

$\therefore$ اما $t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ يهمل

أو $25 - t = 0 \Rightarrow t = 25$

نجد التعجيل عندما $t = 25$ ، التعجيل = مشتقة السرعة

$a(t) = v'(t)$

$a(t) = 100 - 12t$

$a(25) = 100 - 12(25) = 100 - 300 = -200\ m/s^2$

إثرائيـات

س : إذا كان للمنحني $y = x^2 - 4x + k$ نقطة نهاية صغرى محلية تنتمي لمحور السينات جد:

$a)$ قيمة $k \in R$ ، $b)$ المساحة المحددة بالمنحني و المستقيم $y = 4$

$a)$ ∵ للدالة نهاية محلية $\Leftarrow f'(x) = 0$

$f'(x) = 2x - 4$

$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

∵ نقطة النهاية ∋ لمحور السينات $\Leftarrow y = 0$

$\therefore (2,0)$ نقطة النهاية

∵ $(2,0)$ ∋ للمنحني ∴ تتحقق الدالة

$0 = (2)^2 - 4(2) + k$

$0 = 4 - 8 + k \Rightarrow 0 = -4 + k \Rightarrow k = 4$

∴ معادلة المنحني هي $y = x^2 - 4x + 4$

b) المساحة المحددة بالمنحني $y = x^2 - 4x + 4$ والمستقيم $y = 4$

نجد نقاط التقاطع $x^2 - 4x + 4 = 4$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , x = 4$

∴ فترة التكامل هي $[0,4]$

$A = \int_0^4 (x^2 - 4x)dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^4$

$= \left(\frac{64}{3} - 32\right) - 0$

$= \frac{64-96}{3} = \frac{-32}{3}$

$A = \left|\frac{-32}{3}\right| = \frac{32}{3} \ unit^2$

س : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الدالتين $y = x + 3$, $f(x) = x^2 - x$

نجد التقاطع بين المنحنيين $f(x) = y$

$x^2 - x = x + 3$

$x^2 - x - x - 3 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

أما $x = 3$ او $x = -1$

فترة التكامل هي $[-1,3]$

$A = \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3)\, dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - 3x\right]_{-1}^3 = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^3$

$= \left(\frac{27}{3} - 9 - 9\right) - \left(\frac{-1}{3} - 1 + 3\right)$

$= (9 - 18) - \left(\frac{-1}{3} + 2\right)$

$= -9 - \frac{5}{3} = \frac{-32}{3}$

$A = |A| = \left|-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3} \ unit^2$

الحجوم الدورانية

١- لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y = f(x)$ المستمرة من $x = a$ الى $x = b$ حول محور السينات ، نطبق العلاقة التالية : $V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$

٢- لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $x = f(y)$ المستمرة من $y = a$ الى $y = b$ حول محور الصادات ، نطبق العلاقة التالية : $V = \pi \int_a^b x^2 dy$

ملاحظات حول الحجوم الدورانية:

١- إذا كان الدوران حول المحور السيني يجب ان يكون المستقيمين $x = a, x = b$ والدالة $y = f(x)$.

٢- إذا كان الدوران حول المحور الصادي يجب ان يكون المستقيمين $y = a, y = b$ والدالة $x = f(y)$

مثال المنطقة المحددة بين المنحني $0 \le x \le 4$, $y = \sqrt{x}$ ومحور السينات، دارت حول محور السينات جد حجمها

∵ ذكر في السؤال محور السينات ∴ القانون يكون $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

وفترة التكامل هي $[0,4]$ لأن $0 \le x \le 4$

$$\therefore V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^4 x \, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \left[\frac{16}{2} - 0\right] = \pi(8) = 8\pi \, unit^3$$

مثال المنطقة المحددة بالمنحني $1 \le y \le 4$, $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ دارت حول محور الصادات. جد حجمها

∵ الدوران حول محور الصادات $\Leftarrow$ $V = \pi \int_a^b x^2 \, dy$

فترة التكامل هي $[1,4]$ لأن $1 \le y \le 4$

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 dy \Rightarrow V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{y}\right) dy$$

$$V = \pi [\, ln|y| \,]_1^4 \Rightarrow V = \pi \, [\, ln|4| - ln|1| \,]$$

$$V = \pi [ln\, 4 - 0] \Rightarrow V = \pi \; ln\, 2^2 \Rightarrow V = 2\pi \; ln\, 2 \quad unit^3$$

مثال أوجد الحجم الناشئ من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$ حول المحور السيني

∵ الدوران حول محور السيني $\Leftarrow V = \pi \int_a^b y^2 dx$

فترة التكامل هي $[0,2]$

$\therefore V = \pi \int_0^2 (8x)\, dx$

$V = \pi \left[\frac{8x^2}{2}\right]_0^2 \Rightarrow V = \pi\,[4x^2]_0^2$

$V = \pi\,[4(4) - 4(0)]$

$V = \pi\,(16) \Rightarrow V = 16\pi \ \ unit^3$

مثال أوجد الحجم الناشئ من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافيء الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيم $x = 5$, $x = 0$ حول المحور السيني

الدوران حول المحور السيني $\Leftarrow V = \pi \int_a^b y^2\, dx$

فترة التكامل $[0,5]$

$\therefore V = \pi \int_0^5 (2x^2)^2\, dx$

$V = \pi \int_0^5 4x^4\, dx$

$V = \pi \left[4\, \frac{x^5}{5}\right]_0^5 \Rightarrow V = \pi \left[4 \frac{(5)^5}{5} - 4 \frac{(0)^5}{5}\right]$

$V = \pi[4(5)^4]$

$V = \pi\,[4(625)]$

$V = 2500\,\pi \ \ unit^3$

مثال أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 16$, $y = 0$ حول المحور الصادي.

∵ الدوران حول المحور الصادي $\Leftarrow \therefore V = \pi \int_a^b x^2\, dy$

فترة التكامل هي $[0,16]$

الدالة هي $y = 4x^2$ يجب تحويلها بالصيغة $x = f(y)$ وذلك لان الدوران حول المحور الصادي

$y = 4x^2\,] \div 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} y$

$\therefore V = \pi \int_0^{16} \left(\frac{1}{4} y\right) dy \Rightarrow V = \pi \left[\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{2}\right)\right]_0^{16}$

$V = \frac{\pi}{8}\,[y^2]_0^{16}$

$V = \frac{\pi}{8}[(16)^2 - 0] \Rightarrow V = \frac{\pi}{8}((16)(16))$
$V = 32\,\pi \quad unit^3$

مثال أوجد الحجم الناشيء من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ دورة كاملة حول المحور الصادي

∵ الدوران حول المحور الصادي $\Leftarrow \quad V = \pi \int_a^b x^2 dy$

يجب تحويل المستقيمين من x إلى y وذلك بتعوض قيم x في الدالة $y = \frac{1}{x}$ لايجاد قيم y

$x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{1} = 1$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

∴ فترة التكامل هي [1,2]

ويجب تحويل الدالة إلى صيغة $x = f(y)$

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$ [بقلب التناسب]

$V = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{y}\right)^2 dy$

$V = \pi \int_1^2 y^{-2}\, dy$

$V = \pi \left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_1^2 \Rightarrow V = \pi \left[\frac{-1}{y}\right]_1^2$

$V = \pi \left[\frac{-1}{2} - \left(\frac{-1}{1}\right)\right]$

$V = \pi \left[\frac{-1}{2} + 1\right]$

$V = \frac{1}{2}\pi\, unit^3$

تمارين [4 – 7]

١– أوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 2$ حول المحور السيني.

∵ الدوران حول المحور السيني $\Leftarrow V = \pi \int_a^b y^2\, dx$

$V = \pi \int_1^2 (x^2)^2\, dx$

$V = \pi \int_1^2 x^4\, dx \Rightarrow V = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2$

$$V = \pi\left[\frac{(2)^5}{5} - \frac{(1)^5}{5}\right]$$
$$V = \pi\left[\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right]$$
$$V = \pi\left(\frac{31}{5}\right) \Rightarrow V = \frac{31\,\pi}{5}\ \ unit^3$$

٢- أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي.

∵ الدوران حول المحور الصادي $\Leftarrow V = \pi\int_a^b x^2 dy$

في السؤال يوجد فقط أحد المستقيمين وهو $y = 4$

∴ لإيجاد المستقيم الثاني نجعل $x = 0$ في منحني الدالة ونستخرج قيمة y

$$x = 0 \Rightarrow y = (0)^2 + 1 \Rightarrow y = 1$$

∴ المستقيمين هما $y = 1\,,\ y = 4$

منحني الدالة هو $y = x^2 + 1$ يجب تحويله إلى صيغة $x = f(y) \Leftarrow x^2 = y - 1$

$$V = \pi\int_1^4 (y-1)\ dy$$
$$V = \pi\left[\frac{y^2}{2} - y\right]_1^4$$
$$V = \pi\left[\left(\frac{16}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$
$$V = \pi\left[(8-4) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \pi\left[4 + \frac{1}{2}\right] = \frac{9}{2}\ \pi\ unit^3$$

٣- احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 + x = 1$ والمستقيم $x = 0$ حول المحور الصادي.

∵ الدوران حول المحور الصادي $\Leftarrow \therefore V = \pi\int_a^b x^2\ dy$

يجب جعل الدالة بالصيغة $x = f(y)$

$$\because y^2 + x = 1 \Rightarrow x = 1 - y^2$$

يجب استخراج المستقيمين $y = a\ ,\ y = b$ وذلك بتعويض المستقيم $x = 0$ في منحني الدالة.

$$y^2 + x = 0 \Rightarrow y^2 + 0 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Longrightarrow y = \mp 1$$

∴ المستقيمين هما $y = -1\,,\ y = 1$

$$V = \pi\int_{-1}^{1} (1-y^2)^2\,dy$$
$$V = \pi\int_{-1}^{1} (1 - 2y^2 + y^4)\,dy$$
$$V = \pi\left[y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_{-1}^{1}$$

$$V=\pi\left[\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]$$
$$V=\pi\left[\left(\frac{15-10+3}{15}\right)-\left(\frac{-15+10-3}{15}\right)\right]$$
$$V=\pi\left[\frac{8}{15}+\frac{8}{15}\right]$$
$$V=\pi\left[\frac{16}{15}\right]\Rightarrow V=\frac{16}{15}\pi\ \ unit^3$$

٤- أحسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2=x^3$ والمستقيمان $x=0\ ,\ x=2$ حول المحور السيني.

∵ الدوران حول المحور السيني ⟸ $V=\pi\int_a^b y^2\,dx$

$$V=\pi\int_0^2 x^3\ dx$$
$$V=\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2$$
$$V=\frac{\pi}{4}[(2)^4-(0)^4]$$
$$V=\frac{\pi}{4}[16]$$
$$V=4\pi\ \ unit^3$$

اثرائي جد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=\sin x$ والفترة $[0,\pi]$ حول محور السينات.

∵ الدوران حول المحور السيني ⟸ $V=\pi\int_a^b y^2\,dx$

$$V=\pi\int_0^{\pi}(\sin x)^2\,dx$$
$$V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$$
$$V=\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$V=\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\pi}$$
$$V=\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$
$$V=\pi\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\pi\right)-\left(0-\frac{1}{4}\sin 0\right)\right]$$
$$V=\pi\left[\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}(0)\right)-\left(-\frac{1}{4}(0)\right)\right]$$
$$V=\pi\left[\frac{\pi}{2}\right]$$
$$V=\frac{\pi^2}{2}\ \ unit^3$$

الفصل الخامس (المعادلات التفاضلية)

المقدمة:

يعتبر موضوع المعادلات التفاضلية من المواضيع الأساسية في الرياضيات التطبيقية لكثرة ظهورها في المسائل العلمية والهندسية، في هذا الفصل سنتطرق وبشكل مبسط للمعادلة التفاضلية وكيفية حلها.

تعريف : المعادلة التفاضلية (Differential equation) هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة أو أكثر للدالة المجهولة في المعادلة (أي للمتغير التابع في المعادلة).

ملاحظة : المعادلة التفاضلية الاعتيادية هي علاقة بين متغير مستقل (independt Variable) وليكن (x) ودالته غير المعروفة (y) $(Dependt\ variabie)$ وبعض مشتقات (y) بالنسبة إلى (x) ويرمز لها $O.D.E$ والتي هي مختصر إلى (Ordinary Defferential Equation)

مثلاً:

1) $\frac{dy}{dx} = 3y - 4x$

2) $x^2y'' + 5xy' - x^3y = 0$

3) $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = y - 4$

4) $y' + x^2y + x = y$

5) $(y'')^3 + 2y' + x^2 \ln x = 5$

6) $y^{(4)} + \cos y + x^2y\, y' = 0$

كلها معادلات تفاضلية اعتيادية لأن المتغير y يعتمد فقط على المتغير x

تعريف

الدرجة Degree: تعرف درجة المعادلة التفاضلية بأنها: أكبر قوة (أس) مرفوعة له أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية.

المرتبة أو (الرتبة) Order: تعرف رتبة المعادلة التفاضلية بأنها رتبة أعلى مشتقة.

مثلاً :

1) $\frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$ **من الرتبة الأولى والدرجة الأولى**

2) $\frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3xy + 7$ **من الرتبة الثانية والدرجة الأولى**

3) $y''' + y' - y = 0$ **من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى**

4) $y'' + 2y(y')^3 = 0$ **من الرتبة الثانية والدرجة الأولى**

5) $\frac{dy}{dx} = x^3 - 5$ **من الرتبة الأولى والدرجة الأولى**

6) $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+2\frac{d^2y}{dx^2}=0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية

7) $y^{(4)}+\cos y+x^2y\,y'=0$ من الرتبة الرابعة والدرجة الأولى

ملاحظة : درجة المعادلة التفاضلية التي تكون جبرية في مشتقاتها هي الدرجة الجبرية للمشتقة ذات اعلى رتبة تظهر في المعادلة، فمثلاً المعادلة التفاضلية $(y'')^2=\sqrt{1+(y')^2}$ من الرتبة الثانية لأن أعلى مشتقة فيها y''

حيث يمكن إزالة الجذور أو الأسس الكسرية ونحصل على : $(y'')^4=1+(y')^2$ وبذلك تكون درجة المعادلة التفاضلية الرابعة.

حل المعادلـــة التفــاضــلية

إن الغاية من دراسة المعادلات التفاضلية هي كيفية إيجاد حلولاً لها، ويتم ذلك بإيجاد علاقة بين المتغير التابع (غير المستقل) y والمتغير المستقل x بحيث تكون العلاقة خالية من الاشتقاقات وأن تحقق المعادلة التفاضلية عند التعويض.

تعريف : حل المعادلة التفاضلية هو أية علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث إن هذه العلاقة

أ- خالية من المشتقة.

ب- معرفة على فترة معينة.

ج- تحقق المعادلة التفاضلية

أي إن الحل للمعادلة التفاضلية الاعتيادية هو أي دالة لمجهول (المتغير التابع) بدلالة المتغير المستقل تحقق المعادلة التفاضلية.

مثال **بين إن العلاقة $y=x^2+3x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $xy'=x^2+y$**

يجب إيجاد المشتقة الأولى من العلاقة $y=x^2+3x$ وذلك لتعويض y و y' في المعادلة التفاضلية

$xy'=x^2+y$

فأذا كان الطرف الأيمن = الطرف الأيسر فأن $y=x^2+3x$ هي حل للمعادلة التفاضلية.

أما إذا كان الطرف الأيمن ≠ الطرف الأيسر فأن $y=x^2+3x$ ليس حلاً للمعادلة التفاضلية.

$\therefore y=x^2+3x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$y'=2x+3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

نعوض (1) و(2) في المعادلة التفاضلية $xy'=x^2+y$

$L.H.S:\ xy'=x(2x+3)=2x^2+3x$

$R.H.S:\ x^2+y=x^2+(x^2+3x)$

$= 2x^2 + 3x$
$\therefore L.H.S = R.H.S$

$\therefore\ y = x^2 + 3x$ هي حل للمعادلة التفاضلية

الحل الخاص والعام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية

إن حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية كما اسلفنا هو أي علاقة بين y, x تحقق المعادلة، غير إن الحل العام لأي معادلة تفاضلية هو الحل المشتمل على عدد من الثوابت الاختيارية مساوٍ لرتبة المعادلة، فإذا كانت المعادلة من الرتبة الأولى وجب ان يكون حلها العام مشتملاً على ثابت اختياري واحد هو ثابت التكامل الذي يظهر عند إجراء خطوة التكامل الوحيدة لمعادلات الرتبة الأولى، أما إذا كانت المعادلة من الرتبة الثانية وجب اشتمال حلها على ثابتي تكامل نظراً لإجراء خطوتي تكامل عند حل معادلة الرتبة الثانية. وهكذا.

فعلى سبيل المثال $\frac{dy}{dx} - 5y = 0$

تعتبر معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ويحققها الحل الخاص $y = e^{5x}$ كما يبدو من التعويض في المعادلة التفاضلية إلى إن حلها العام يجب أن يشتمل على ثابت اختياري واحد c فيكون $y = ce^{5x}$

أما المعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ فهي من الرتبة الثانية وتحققها الحلول الخاصة. $y = \sin x\ ,\ y = \cos x$ غير إن حلها العام يجب أن يشتمل على ثابتي تكامل اختياريين ، كأن يكونا A, B ويصبح الحل العام عندئذ بالصورة $y = A\sin x + B\cos x$.

ملاحظة : – إذا كانت صيغة السؤال (أثبت إن) أو (بين إن) أو (برهن إن) فمعنى ذلك إن العلاقة المعطاة هي أحد حلول المعادلة التفاضلية.

– أما إذا كانت صيغة السؤال (هل إن) فمعنى ذلك إن الأمر مشكوك فيه فيوجد احتمالين أما أن تكون العلاقة حل للمعادلة أو ليست حل لها.

مثال **أثبت إن $y = x\ln|x| - x$ أحد حلول المعادلة التفاضلية $x\frac{dy}{dx} = x + y\ ,\ x > 0$**

$\because$ صيغة السؤال (أثبت إن) معنى ذلك إن $y = x\,\ln|x| - x$ هو أحد الحلول للمعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y$

ويجب إثبات ذلك بأن الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

$y = x\,ln|x| - x \ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$

$\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + ln|x|\ .(1) - 1$ مشتقة حاصل ضرب دالتين

$= 1 + ln|x| - 1$

$= ln|x| \ldots\ldots..(2)$

نعوض 1 و 2 في المعادلة التفاضلية

$L.H.S = x\frac{dy}{dx}$
$= x\, ln|x|$
$R.H.S = x + y$
$= x + x\, ln|x| - x$
$= x\, ln|x|$
$\therefore L.H.S = R.H.S$

$\therefore$ $y = x\, ln|x|$ هو أحد حلول المعادلة التفاضلية.

مثال بين إن $ln\, y^2 = x + a$ حيث $a \in R$ حلا للمعادلة $2\dot{y} - y = 0$

نأخذ العلاقة $ln\, y^2 = x + a$ ونشتقها مشتقة أولى من ثم نبسط المقدار حتى نتوصل إلى المعادلة التفاضلية.

$ln\, y^2 = x + a$
$\frac{1}{y^2}(2y\, y') = 1$
$\frac{2y'}{y} = 1 \Rightarrow 2y' = y \Rightarrow 2y' - y = 0$

$\therefore$ $ln\, y^2 = x + a$ حل المعادلة التفاضلية

مثال هل $y = x^3 + x - 2$ حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

نشتق العلاقة مرتين حتى نصل لاعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية وهي المشتقة الثانية

$y = x^3 + x - 2$
$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$
$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

بدأنا بالعلاقة وأنتهينا بالمعادلة التفاضلية

$\therefore$ $y = x^3 + x - 2$ هو حل للمعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

مثال برهن إن $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$

نحتاج y و y'' للتعويض في الطرف الايسر من المعادلة التفاضلية.

$y = 3\cos 2x + 2\sin 2x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$
$y' = 3\,(-\sin 2x(2)) + 2\,(\cos 2x\,(2))$
$y' = -6\sin 2x + 4\cos 2x$
$y'' = -6(\cos 2x\,(2)) + 4\,(-sin2\,x(2))$
$y'' = -12\cos 2x - 8\sin 2x \ldots\ldots\ldots(2)$

نعوض 1 و 2 في الطرف الأيسر من المعادلة

$y'' + 4y = 0$

$L.H.S = y'' + 4y$
$= -12\cos 2x - 8\sin 2x + 4\,(3\cos 2x + 2\sin 2x)$
$= -12\cos 2x - 8\sin 2x + 12\cos 2x + 8\sin 2x$
$= 0$
$= R.H.S$

وعليه فإن $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حل المعادلة التفاضلية.

مثال هل $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلاً للمعادلة $y\,y'' + (y')^2 - 3x = 5$

نشتق $y^2 = 3x^2 + x^3$ مرتان ضمنياً

$2\,y\,y' = 6x + 3x^2$
$2y\,y'' + y'(2y') = 6 + 6x$
$2\,y\,y'' + 2(y')^2 - 6x = 6 \quad] \div 2$
$y\,y'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 5$

حيث الطرف الأيمن = 5 وليس 3

$\neq R.H.S$

وعليه فإن $y^2 = 3x^2 + x^3$ ليس حلاً للمعادلة أعلاه.

مثال بين إن $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$

$\because y = e^{2x} + e^{-3x} \Rightarrow y' = e^{2x}(2) + e^{-3x}(-3)$
$y' = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$
$y'' = 2e^{2x}(2) - 3e^{-3x}(-3)$
$y'' = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$

نعوض y' و y'' في الطرف الايسر من المعادلة التفاضلية للتوصل للطرف اليمن

$L.H.S = y'' + y' - 6y$
$= 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6(e^{2x} + e^{-3x})$
$= 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x}$
$= 0$
$= R.H.S$

$\therefore$ $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية

تمارين [5 – 1]

١– بين رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية الآتية:

a) $(x^2 + y^2) + 3xy\frac{dy}{dx} = 0$ (من الرتبة الأولى و الدرجة الأولى)

b) $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 5y = 0$ (الرتبة الثانية والدرجة الأولى)

c) $(y''')^3 - 2y' + 8y = x^3 + \cos x$ (الرتبة الثالثة والدرجة الثالثة)

d) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 0$ (الرتبة الثالثة والدرجة الثانية)

٢- برهن إن $y = \sin x$ هو حل للمعادلة $y'' + y = 0$

$y = \sin x$
$y' = \cos x$
$y'' = -\sin x$
$L.H.S = y'' + y$
$= -\sin x + \sin x$
$= 0$
$= R.H.S$

$\therefore$ $y = \sin x$ هو حل للمعادلة التفاضلية.

٣- برهن إن العلاقة $S = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ هي حل للمعادلة $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$

$\frac{ds}{dt} = 8(-\sin 3t(3)) + 6(\cos 3t\,(3))$
$= -24\sin 3t + 18\cos 3t$
$\frac{d^2s}{dt^2} = -24\,(\cos 3t\,(3)) + 18(-\sin 3t(3))$
$= -72\cos 3t - 54\sin 3t$
$L.H.S = \frac{d^2s}{dt^2} + 9s$
$= -72\cos 3t - 54\sin 3t + 9(8\cos 3t + 6\sin 3t)$
$= -72\cos 3t - 54\sin 3t + 72\cos 3t + 54\sin 3t$
$= 0$
$= R.H.S$

$\therefore$ $S = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ هي حل للمعادلة التفاضلية.

٤- هل إن $y = x + 2$ حلاً للمعادلة $y'' + 3y' + y = x$

$y = x + 2$
$y' = 1$
$y'' = 0$
$L.H.S = y'' + 3y' + y$
$= 0 + 3(1) + x + 2$
$= 3 + x + 2$
$= 5 + x$
$\neq R.H.S$

$\therefore$ $y = x + 2$ ليس حلاً للمعادلة التفاضلية.

٥- هل إن $y = \tan x$ حلاً للمعادلة $y'' = 2y(1+y^2)$

$y = \tan x$
$y' = \sec^2 x$
$y'' = 2\sec x\ (\sec x\ \tan x)$
$y'' = 2\sec^2 x\ \tan x$
$\therefore y'' = 2\tan x\,(1+\tan^2 x)$
$y'' = 2y\,(1+y^2)$

$\because \sec^2 x = 1+\tan^2 x$

$y = \tan x$

$\therefore$ $y = \tan x$ هو حل للمعادلة التفاضلية

٦- هل إن $2x^2 + y^2 = 1$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y^3y'' = -2$

نشتق $2x^2 + y^2 = 1$ مرتان ثم نبسط حتى نتوصل إلى المعادلة التفاضلية

$2x^2 + y^2 = 1$
$4x + 2yy' = 0$
$4 + 2yy'' + y'(2y') = 0$
$4 + 2yy'' + 2(y')^2 = 0\ ] \div 2$
$2 + yy'' + (y')^2 = 0 \ldots\ldots(1)$

يجب التعويض بدلاً عن y' وذلك لعدم وجود $\acute{y}$ في المعادلة التفاضلية

$\because 4x + 2yy' = 0$ من المشتقة الأولى

$2yy' = -4x \Rightarrow y' = \frac{-4x}{2y} \Rightarrow y' = \frac{-2x}{y} \ldots\ldots\ldots(2)$

$2 + yy'' + \left(\frac{-2x}{y}\right)^2 = 0$ نعوض 2 في 1

$2 + yy'' + \frac{4x^2}{y^2} = 0\ ] * y^2$
$2y^2 + y^3y'' + 4x^2 = 0$
$y^3y'' = -4x^2 - 2y^2$
$y^3y'' = -2\,(2x^2 + y^2)$

$\because 2x^2 + y^2 = 1$ [معطى في السؤال]

$\therefore y^3y'' = -2(1)$
$y^3y'' = -2$

$\therefore$ $2x^2 + y^2 = 1$ هي حل للمعادلة التفاضلية

٧- هل إن $yx = \sin 5x$ حل للمعادلة $xy'' + 2y' + 25yx = 0$

نشتق $yx = \sin 5x$ مرتان ضمنياً

$y(1) + xy' = \cos 5x\,(5)$
$y + xy' = 5\cos 5x$

نشتق مرة أخرى

$y' + xy'' + y'(1) = 5\left(-\sin 5x\,(5)\right)$
$xy'' + 2y' = -25\sin 5x$
$xy'' + 2y' + 25\sin 5x = 0$
$\because\ yx = \sin 5x$ [العلاقة المعطاة في السؤال]
$\therefore\ x\,y'' + 2y' + 25\,yx = 0$

$\therefore\ yx = \sin 5x$ حل للمعادلة التفاضلية

٨ – بين ان $y = ae^{-x}$ هو حلاً للمعادلة $y' + y = 0$ حيث $a \in R$ ؟

$y = ae^{-x}$
$y' = ae^{-x}(-1) \Rightarrow y' = -ae^{-x}$
$L.H.S = y' + y \Rightarrow -ae^{-x} + ae^{-x} = 0 = R.H.S$

$\therefore\ y = ae^{-x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية

٩– بين ان $ln|y| = x^2 + c$, $c \in R$ هو حلاً للمعادلة $y'' = 4x^2y + 2y$

$ln|y| = x^2 + c$
$\frac{1}{y}\,y' = 2x$
$y' = 2xy$
نشتق مشتقة ثانية
$y'' = 2xy' + y(2)$
$y'' = 2xy' + 2y \ \ldots\ldots\ldots(1)$
$\because\ y' = 2xy$
$y'' = 2x(2xy) + 2y$ نعوض في 1
$y'' = 4x^2y + 2y$

$\therefore\ ln|y| = x^2 + c$ هو حل للمعادلة التفاضلية.

المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

مقدمة:

إن حل المعادلة التفاضلية هو عمل معاكس لعملية التفاضل، أي يقوم على عمليات التكامل، ومن المعروف إنه لا يمكن إيجاد عكس تفاضل (الصورة المباشرة) لكل دالة . أي لا نتوقع أن يكون لكل معادلة تفاضلية حل عام بدلالة الدوال الأولية المعروفة . وعليه فالمعادلات التفاضلية التي يمكن حلها تقسم إلى أنواع متعددة حسب طريقة الحصول على حلها العام.

وفي هذا الفصل سوف نستعرض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى بمتغيرين y, x

ومع إن هذا النوع من المعادلات التفاضلية قد تبدو بسيطة إلا إنه ليس من الممكن إيجاد حل عام لأي منها بصورة عامة، ولا توجد طريقة عامة للحل. وعليه فسوف نقسم هذه المعادلات والتي يمكن إيجاد حلها بطريقة مباشرة إلى عدة أنواع ، أهمها :

١. المعادلات التي تنفصل متغيراتها.
٢. معادلات تفاضلية من النوع المتجانس.
٣. معادلات تفاضلية تامة.
٤. معادلات تفاضلية خطية – معادلة برنولي.

وفي هذا الفصل سنقتصر على النوعين (1) و (2) وطرائق حليهما.

فمثلاً نأخذ المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى الشكلين الآتيين :

$$1)\ \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$2)\ M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

حيث $M(x,y) \neq 0\ ,\ N(x,y) \neq 0$

فالمعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx} = \frac{3xy}{x+y}$ مثلاً

يمكن أن تكتب بالشكل $(3xy)dx = (x+y)dy$

$$(3xy)dx - (x+y)\,dy = 0$$

حيث إن $M = 3xy\ ,\ \ N = (x+y)$

بعض طرق حل المعادلات التفاضلية

١ – المعادلات التي تنفصل متغيراتها

هذا النوع من المعادلات وكما يظهر من اسمها نستطيع أن نعزل كل الحدود التي تحتوي على x فقط مع dx في جانب والحدود التي تحتوي على y فقط مع dy في الجانب الآخر فنحصل على

$$f(x)\,dx = g(y)dy \quad \dots\dots (1)$$

ثم نكامل طرفي المعادلة (1) فيكون

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

حيث c ثابت اختياري (Arbitrary Constant).

ملاحظة : في هذا النوع يجب عزل القيم التي تحتوي على x مع dx في طرف، وعزل القيم التي تحتوي على y مع dy في طرف آخر، من ثم نكامل الطرفين كلاً بالنسبة إلى متغيره حتى نحصل على معادلة من الصيغة $y = f(x)$

مثال حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 5 \;] * dx$$
$$dy = (2x + 5)\, dx$$
$$\int dy = \int (2x + 5)\, dx$$ تكامل الطرفين كلاً بالنسبة إلى متغيره
$$y = \frac{2x^2}{2} + 5x + c$$
$$y = x^2 + 5x + c$$

مثال حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

نجعل المعادلة بالصورة $[\, g(y)dy = f(x)dx \,]$

$$\left[\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}\right] * dx$$
$$dy = \frac{x-1}{y}\, dx \;] * y$$

نضرب في y حتى نتخلص من قيمة y الموجودة في مقام الطرف الأيمن وجعلها في الطرف الأيسر

$$y\, dy = (x - 1)dx$$

تكامل الطرفين

$$\int y\, dy = \int (x - 1)\, dx$$
$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - x + c \;] * 2$$
$$y^2 = x^2 - 2x + 2c$$

$\because$ c هو ثابت أختياري $\Leftarrow$ $2c$ هو ثابت اختياري أيضاً يمكن تسميته (c_1)

$$\therefore [\; y^2 = x^2 - 2x + c_1 \;]$$ بالجذر التربيعي للطرفين
$$y = \mp\sqrt{x^2 - 2x + c_1}$$

مثال حل المعادلة التفاضلية $dy = \sin x \cos^2 y \; dx$ حيث $y \neq 2(n + 1)\frac{\pi}{2}$

نجعل المعادلة بالصيغة $g(y)dy = f(x)dx$

$$dy = \sin x \cos^2 y \;\; dx \;] \div \cos^2 y$$
$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x \;\; dx$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 y}\; dy = \int \sin x \;\; dx$$
$$\int \sec^2 y \; dy = \int \sin x \;\; dx$$
$$\tan y = -\cos x \; + c$$

مثال أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2\,,\ y = 9$

$$y' - x\sqrt{y} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}\,] * dx$$
$$dy = x\sqrt{y}\,dx] \div \sqrt{y}$$
$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = x\,dx$$
$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int x\ dx$$
$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c$$
$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + c \ \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\because x = 2\,,\ y = 9$$
$$\therefore 2\sqrt{9} = \frac{1}{2}(2)^2 + c$$
$$2(3) = \frac{1}{2}(4) + c$$
$$6 = 2 + c \Rightarrow c = 6 - 2 \Rightarrow c = 4$$
$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 4\,] \div 2$$ نعوض في (1)
$$\sqrt{y} = \frac{1}{4}x^2 + 2$$ للتخلص من الجذر نربع الطرفين
$$y = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right)^2$$

مثال حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ حيث $x = 0\,,\ y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$$ نفصل متغيرات أس e وذلك بتجزئة الاس بأرجاع e إلى حاصل ضرب دالتين
$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}\ e^{y}] * dx$$
$$dy = e^{2x}\ e^{y}dx] \div e^{y}$$
$$\frac{dy}{e^{y}} = e^{2x}\,dx$$
$$\int e^{-y}\ dy = \int e^{2x}\,dx$$
$$-\int -e^{-y}\,dy = \frac{1}{2}\int 2\,e^{2x}\,dx$$
$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$
$$-\frac{1}{e^{y}} = \frac{1}{2}e^{2x} + c \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\because x = 0\ ,\ y = 0$$
$$\therefore\ -\frac{1}{e^{0}} = \frac{1}{2}e^{2(0)} + c$$

$\frac{-1}{1} = \frac{1}{2}(1) + c \Rightarrow -1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -1 - \frac{1}{2}$

$c = -\frac{3}{2}$

$-\frac{1}{e^y} = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(-\frac{3}{2}\right) \quad] * -1$ نعوض في (1)

$\frac{1}{e^y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{2x}$

$\frac{1}{e^y} = \frac{3-e^{2x}}{2}$ بقلب التناسب

$e^y = \frac{2}{3-e^{2x}}$

$y = ln\left|\frac{2}{3-e^{2x}}\right|$ للتخلص من e نأخذ ln للطرفين

مثال جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y$

$(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y] \div (x+1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x+1}] * dx$

$dy = \frac{2y}{x+1}\ dx\ ] \div y$

$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1}\ dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x+1}\ dx$

$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{1}{x+1}\ dx$

$ln|y| = 2\,ln|\,x+1| + ln|c|$

اذا كانت جميع الحدود تحتوي على ln اذا نضيف ln لثابت التكامل

$ln|y| = ln\ |(x+1)^2| + ln|c|$

$ln|y| = ln\ |c\,(x+1)^2|$

$|y| = |c\,(x+1)^2|$ بأخذ e للطرفين

$y = \mp c(x+1)^2$

تمارين [5 – 2]

١– حل المعادلات التفاضلية الآتية بطريقة فصل المتغيرات

a) $\acute{y}\cos^3 x = \sin x$

$\frac{dy}{dx}\cos^3 x = \sin x \quad] \div \cos^3 x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \quad] * dx$

$dy = \frac{\sin x}{\cos^3 x}\ dx$

$$dy = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \frac{1}{\cos^2 x}\ dx$$
$$dy = \tan x \ \ \sec^2 x\ \ dx$$
$$\int dy = \int \underbrace{\tan x}_{f(x)} \ \ \underbrace{\sec^2 x}_{f'(x)}\ \ dx$$
$$y = \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

b) $\frac{dy}{dx} + xy = 3x \qquad x = 1 \ , \ \ y = 2$

$$\frac{dy}{dx} = 3x - xy$$
$$\frac{dy}{dx} = x\,(\,3 - y)\,] * dx$$
$$dy = x\,(3 - y)\,dx\ \ ] \div (3 - y)$$
$$\int \frac{dy}{3-y} = \int x\ \ dx$$
$$-\int \frac{-dy}{3-y} = \int x\ \ dx$$
$$-\,ln\ |3 - y| = \frac{x^2}{2} + c$$
$$ln|(3 - y)^{-1}| = \frac{x^2}{2} + c$$
$$ln\left|\frac{1}{3-y}\right| = \frac{x^2}{2} + c \ldots\ldots\ldots(1)$$
$$ln\left|\frac{1}{3-2}\right| = \frac{1}{2} + c$$ نعوض عن $y = 2 \ , \ x = 1$
$$ln\left|\frac{1}{1}\right| = \frac{1}{2} + c \ \Rightarrow ln\,1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \ -\frac{1}{2}$$
$$ln\left|\frac{1}{3-y}\right| = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$ نعوض في 1
$$ln\left|\frac{1}{3-y}\right| = \frac{x^2-1}{2} \ \Rightarrow \left|\frac{1}{3-y}\right| = e^{\frac{x^2-1}{2}} \ \ \Rightarrow \frac{1}{3-y} = \mp\, e^{\frac{x^2-1}{2}}$$
$$3 - y = \mp \frac{1}{e^{\frac{x^2-1}{2}}} \Rightarrow y = 3 \mp \frac{1}{e^{\frac{x^2-1}{2}}}$$

c) $\frac{dy}{dx} = (x + 1)(y - 1)$

$$\frac{dy}{dx} = (x + 1)(y - 1)\ ] * dx$$
$$dy = (x + 1)(y - 1)\ dx\ \ ] \div (y - 1)$$
$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \ \ (x + 1)\ dx$$
$$ln|y - 1| = \frac{x^2}{2} + x + c$$
$$|y - 1| = e^{\frac{x^2}{2} + x + c}$$
$$y - 1 = \mp\, e^{\frac{x^2}{2} + x + c} \ \Rightarrow y = 1 \mp e^{\frac{x^2}{2} + x + c}$$

d) $(y^2+4y-1)y' = x^2-2x+3$

$(y^2+4y-1)\frac{dy}{dx} = x^2-2x+3 \;] * dx$

$\int (y^2+4y-1)\,dy = \int (x^2-2x+3)\,dx$

$\frac{y^3}{3}+\frac{4y^2}{2}-y = \frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+3x+c$

$\frac{1}{3}y^3+2y^2-y = \frac{1}{3}x^3-x^2+3x+c$

e) $y\,y' = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$

$\left[y\frac{dy}{dx} = 4\sqrt{(1+y^2)^3}\right] * dx$

$y\,dy = 4\sqrt{(1+y^2)^3}\;dx \;] \div \sqrt{(1+y^2)^3}$

$\frac{y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}\,dy = 4dx$

$\int \frac{y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}\,dy = \int 4\;dx$

$\int y\,(1+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,dy = \int 4\;dx$

$\frac{1}{2}\int \underbrace{2y}_{f'(x)}\;\underbrace{(1+y^2)^{-\frac{3}{2}}}_{f(x)}\;dy = 4\int dx$

$\frac{1}{2}\;\frac{(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = 4x+c$

$\frac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = 4x+c \;] * -1$

$\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = -(4x+c)]$ بقلب التناسب

$\sqrt{1+y^2} = \frac{-1}{4x+c}$ بتربيع الطرفين

$1+y^2 = \frac{1}{(4x+c)^2}$

$y^2 = \frac{1}{(4x+c)^2}-1$ بالجذر التربيعي

$y = \mp\sqrt{\frac{1}{(4x+c)^2}-1}$

g) $y' = 2e^x y^3$ $\quad x=0\,,\; y=\frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3 \;] * dx$

$dy = 2e^x y^3\,dx \;] \div y^3$

$\frac{dy}{y^3} = 2e^x dx$

$\int y^{-3}\,dy = \int 2e^x\;dx$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = 2e^x + c$$

$$\frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c \ldots\ldots\ldots(1)$$

نعوض $y = \frac{1}{2}\ ,\ x = 0$

$$\frac{-1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2e^0 + c$$

$$\frac{-1}{2\left(\frac{1}{4}\right)} = 2(1) + c \Rightarrow -2 = 2 + c \Rightarrow c = -2 - 2 \Rightarrow c = -4$$

$$\frac{-1}{2y^2} = 2e^x - 4\ ] \times -2$$ نعوض في (1)

$$\frac{1}{y^2} = -4e^x + 8$$ بقلب التناسب

$$y^2 = \frac{1}{8 - 4e^x}$$ بالجذر

$$y = \frac{\mp 1}{\sqrt{4(2 - e^x)}} \Rightarrow y = \mp \frac{1}{2\sqrt{2 - e^x}}$$

٢- جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

a) $xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 - y^2$$

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - 2y^2\ ] * dx$$

$$xy\,dy = (1 - 2y^2)\ dx\ ]\ \div x$$

$$y\,dy = (1 - 2y^2)\frac{dx}{x}]\ \div (1 - 2y^2)$$

$$\frac{y}{1 - 2y^2}dy = \frac{dx}{x}$$

نقسم ونضرب بـ (-4) لأكمال مشتقة مقام الطرف الايسر

$$\frac{-1}{4}\int \frac{-4y}{1 - 2y^2}\,dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{-1}{4}\ln|1 - 2y^2| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln(1 - 2y^2)^{-\frac{1}{4}} = \ln|cx|$$

$$[\ln\frac{1}{\sqrt[4]{1 - 2y^2}} = \ln|cx|$$ بأخذ e للطرفين

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1 - 2y^2}} = |cx|$$ بقلب التناسب

$$\sqrt[4]{1 - 2y^2} = \frac{1}{|cx|}$$ نرفع الطرفين للقوة 4

$$1 - 2y^2 = \frac{1}{(cx)^4} \Rightarrow -2y^2 = \frac{1}{(cx)^4} - 1]\ \div -2$$

$y^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,c^4\,x^4}$ بجذر الطرفين

$y = \mp\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{c^4\,x^4}\right)}$

$\therefore y = \mp\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{c_1 x^4}\right)}$ نعوض بدلاً عن $c_1 = c^4$

b) $\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$

$\sin x \cos y \,\frac{dy}{dx} = -\cos x \sin y\ ] * dx$

$\sin x \cos y\ dy = -\cos x\ \sin y\ dx\ \ ] \div\ \sin x\ \sin y$

$\frac{\cos y}{\sin y}\ dy = -\frac{\cos x}{\sin x}\ dx$

$\int \frac{\cos y}{\sin y}\ dy = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\ dx$

$ln|\sin y| = -ln|\sin x| + ln|c|$

$ln|\sin y| = ln|(\sin x)^{-1}| + ln|c|$

$ln|\sin y| = ln\ \left|\frac{c}{\sin x}\right|$ بأخذ e للطرفين

$|\sin y| = \left|\frac{c}{sinx}\right|$

$\sin y = \mp\frac{c}{\sin x}$

c) $x\cos^2 y\ dx + \tan y\ dy = 0$

$\tan y\ dy = -x\,cos^2 y\,dx\ \ ] \div \cos^2 y$

$\tan y\ \frac{1}{\cos^2 y}\ dy = -x\ dx$

$\int \underset{f(x)}{\underline{\tan y}}\ \underset{f'(x)}{\underline{\sec^2 y}}\ dy = -\int x\ dx$

$\frac{\tan^2 y}{2} = -\frac{x^2}{2} + c\ ] * 2$

$\tan^2 y = -x^2 + 2c$

$2c$ ثابت اختياري نعوض بدلاً عنه بـ (c_1)

$\tan^2 y\ = c_1 - x^2$ بجذر الطرفين

$\tan y = \mp\sqrt{c_1 - x^2}$

d) $\tan^2 y\ dy = \sin^3 x\ dx$

لا يوجد داعي لفصل المتغيرات لأنها من الصيغة $g(y)dy = f(x)dx$ ∴ تكامل مباشرة

$\int \tan^2 y\,dy = \int \sin^3 x\,dx$

$\int(\sec^2 y - 1)\,dy = \int \sin x \sin^2 x\ \ dx$

$\int(\sec^2 y - 1)\,dy = \int \sin x\ \ (1 - \cos^2 x)\,dx$

$\int(\sec^2 y - 1)\,dy = \int(\sin x - \sin x \cos^2 x)\,dx$

$f'(x)$ $f(x)$

$\tan y - y = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$

e) $\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \, \cos^2 y$

$\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 y \;\;] * dx$

$dy = \cos^2 x \, \cos^2 y \, dx \;] \div \cos^2 y$

$\frac{dy}{\cos^2 y} = \cos^2 x \, dx$

$\sec^2 y \, dy = \cos^2 x \, dx$

$\int \sec^2 y \, dy = \int \cos^2 x \, dx$

$\int \sec^2 y \, dy = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$

$\tan y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 2x) + c$

$\tan y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2+e^y} \;\;] * (3y^2 + e^y)\,dx$

$(3y^2 + e^y)\,dy = \cos x \, dx$

$\int(3y^2 + e^y)\,dy = \int \cos x \, dx$

$\frac{3y^3}{3} + e^y = \sin x + c$

$y^3 + e^y = \sin x + c$

g) $e^{x+2y} + y' = 0$

$e^{x+2y} + \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = -e^{x+2y}$

$dy = -e^x \, e^{2y} \, dx \,] \div e^{2y}$

$\frac{1}{e^{2y}} \, dy = -e^x dx$

$e^{-2y} \, dy = -e^x \, dx$

$\frac{-1}{2} \int -2 \, e^{-2y} dy = -\int e^x \, dx$

يهمل

$-\frac{1}{2} \, e^{-2y} = -e^x + c \;\;] * \; -2$

$e^{-2y} = 2e^x - 2c$

$\frac{1}{e^{2y}} = 2e^x - 2c$

∵ $(-2c)$ ثابت أختياري ∴ نعوض بدلاً عنه بـ (c_1)

$\frac{1}{e^{2y}} = 2e^x + c_1$ بقلب التناسب

$e^{2y} = \frac{1}{2e^x + c_1}$

ثانياً : المعادلة التفاضلية المتجانسة

قد تكون المعادلة التفاضلية ليست قابلة لفصل المتغيرات فيها ولكن قد تكون في الوقت نفسه بصورة معينة نستطيع تحويلها إلى معادلة قابلة للفصل وذلك باستخدام بعض التحويلات ومن هذه الصور المعادلة التفاضلية المتجانسة وهي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

فمثلاً المعادلة $(x^4 + y^4)\frac{dy}{dx} = x^3y$ يمكن كتابتها على الصورة الآتية $\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}$

وذلك بالقسمة على x^4

مثال بين أي المعادلات التفاضلية الآتية متجانسة؟

١- المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+y^3}{3x^2y}$

بقسمة البسط والمقام على $x^3 \neq 0$ [أعلى قوة الى x] ينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{y^3}{x^3}}{\frac{3x^2y}{x^3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3\left(\frac{y}{x}\right)}$$

∴ المعادلة متجانسة

٢- المعادلة التفاضلية $2xyy' - y^2 + 2x^2 = 0$

بقسمة المعادلة على [أعلى قوة لـ x] وهي $x^2 \neq 0$ ينتج

$$\frac{2xy}{x^2}y' - \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{x^2}{x^2} = 0$$

$$2\left(\frac{y}{x}\right)y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2(1) = 0$$

∴ المعادلة متجانسة

٣- المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^2-y}{x^3}$

بالقسمة على $x^3 \neq 0$ ينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{y}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{y}{x^3}}{1}$$

هذه المعادلة غير متجانسة لأن لا يمكن وضعها بالصيغة $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

طريـقـة حــل المـعادلــة المـتجانـــسة

إذا كانت المعادلة التفاضلية متجانسة فإننا لغرض حلها نتبع الخطوات الآتية:

١) نكتبها بالصورة $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ثم نعوض عن $v = \frac{y}{x}$ أو $y = vx$ حيث v متغير جديد وهو دالة لـx

٢) نشتق $y = vx$ بالنسبة لـ x فنحصل على $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$

٣) بالربط بين 1 و 2 ينتج $x\frac{dv}{dx} + v = f(v) \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$

٤) بعد فصل المتغيرات نحصل على $\frac{dv}{f(v)-v} = \frac{dx}{x}$

٥) بأخذ تكامل الطرفين $\int \frac{dv}{f(v)-v} = \int \frac{dx}{x} + c$ نحصل على الحل العام بدلالة $v\,,\ x$

٦) نعوض بعد ذلك عن $v = \frac{y}{x}$ فنحصل على حل المعادلة بدلالة المتغيرين $y\,,\ x$

مثال حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{3y^2-x^2}{2xy}$

١- قسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

٢- نفرض إن $v = \frac{y}{x}$ حتى تصبح المعادلة بالشكل الآتي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3v^2-1}{2v}$$

٣- بما إن $v = \frac{y}{x} \Leftarrow y = vx \Leftarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ [نشتق v بالنسبة إلى x]

٤- نعوض ناتج الخطوة 3 في الخطوة 2 ينتج

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2-1}{2v}$$

٥- نفصل المتغيرات ونضعها بالصورة $g(v)dv = f(x)dx$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2-1}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2-1}{2v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2-1-2v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-1}{2v} \;] * \frac{dx}{x}$$

$$dv = \frac{v^2-1}{2v} \; \frac{dx}{x} \;] * \frac{2v}{v^2-1}$$

$$\frac{2v}{v^2-1}\,dv = \frac{dx}{x}$$

٦- تكامل الطرفين كلا بالنسبة الى متغيره

$$\int \frac{2v}{v^2-1}\,dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$ln\ |v^2-1| = ln\ |x| + ln\ |c|$$

بأخذ e للطرفين

$$ln|v^2-1| = ln|cx|$$

$$|v^2-1| = |cx|$$

$$v^2-1 = \mp cx \Rightarrow c = \frac{\mp(v^2-1)}{x}$$

٧- نعوض عن $v = \frac{y}{x}$ ينتج

$$c = \frac{\mp\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)}{x}$$

$$c = \mp\left(\frac{\frac{y^2-x^2}{x^2}}{x}\right) \Rightarrow c = \mp\left(\frac{y^2-x^2}{x^3}\right)$$

مثال حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$

بقسمة طرفي المعادلة على $(x \neq 0)$ ينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}+\frac{x}{x}}{\frac{y}{x}-\frac{x}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1} \;\dots\dots\dots (1)$$

$$let\ \frac{y}{x} = v \Rightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

نعوض في 1

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{v+1}{v-1} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1}{v-1} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1-v(v-1)}{v-1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1-v^2+v}{v-1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2+2v+1}{v-1}$$

نفصل المتغيرات

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2+2v+1}{v-1} \;] * \frac{dx}{x}$$

$$dv = \frac{-v^2+2v+1}{v-1} \; \frac{dx}{x} \;] * \frac{v-1}{-v^2+2v+1}$$

$$\int \frac{v-1}{-v^2+2v+1} dv = \int \frac{dx}{x}$$

مشتقة المقام هي $-2v + 2 \Leftarrow$ نضرب ونقسم على (-2)

$$\frac{-1}{2}\int \frac{-2v+2}{-v^2+2v+1} dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2} ln|-v^2 + 2v + 1| = ln|x| + ln|c|$$

$$ln|-v^2 + 2v + 1|^{-\frac{1}{2}} = ln|cx|$$ بأخذ e للطرفين

$$\frac{1}{\sqrt{-v^2+2v+1}} = |cx|$$ بقلب التناسب

$$\sqrt{2v - v^2 + 1} = \frac{1}{|cx|}$$ بتربيع الطرفين

$$2v - v^2 + 1 = \frac{1}{(cx)^2} \Rightarrow 2v - v^2 + 1 = \frac{1}{c^2} \; \frac{1}{x^2}$$

$\frac{1}{c^2}$ ثابت أختياري يمكن تسميته c_1

$$\therefore 2v - v^2 + 1 = c_1 \left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$2\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{c_1}{x^2} \;] * x^2$$ نعوض عن $v = \frac{y}{x}$ ينتج

$$2xy - y^2 + x^2 = c_1 \Rightarrow c_1 = x^2 + 2xy - y^2$$

مثال حل المعادلة $(3x - y)\, y' = x + y$

$$(3x - y)\frac{dy}{dx} = x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{3x-y}$$

بالقسمة على $x \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x} + \frac{y}{x}}{3\frac{x}{x} - \frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{3 - \frac{y}{x}} \; \dots\dots\dots (1)$$

$$Let \; \frac{y}{x} = v \Rightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1+v}{3-v}$$ نعوض في (1)

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v-v(3-v)}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-2v+1}{3-v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{(v-1)^2}{3-v}$$

$\Rightarrow \frac{3-v}{(v-1)^2}\, dv = \frac{dx}{x}$ نفصل المتغيرات

لا يمكن تكامل الطرف الأيسر وهو بهذه الصورة إذن يجب التبسيط أولاً وذلك بهدف الاختصار مع المقام

وذلك بتجزأة العدد 3 الى حاصل جمع العددين 2+1

$\frac{2+1-v}{(v-1)^2} dv = \frac{dx}{x}$

$\frac{2-(v-1)}{(v-1)^2}\, dv = \frac{dx}{x}$

$\left(\frac{2}{(v-1)^2} - \frac{v-1}{(v-1)^2}\right)\, dv = \frac{dx}{x}$ تجزأة البسط على المقام

$\int \left(\frac{2}{(v-1)^2} - \frac{1}{(v-1)}\right) dv = \int \frac{dx}{x}$

$\int 2(v-1)^{-2}\, dv - \int \frac{1}{(v-1)}\, dv = \int \frac{dx}{x}$

$2\,\frac{(v-1)^{-1}}{-1} - ln|v-1| = ln|x| + c$

$\frac{-2}{(v-1)} - ln|v-1| - ln|x| = c$

$\therefore c = -\left(\frac{2}{v-1} + ln|v-1| + ln|x|\right)$

$c = -(\frac{2}{v-1} + ln|x(v-1)|\,) * -1$

$-c = \frac{2}{v-1} + ln|x(v-1)|$

$-c = c_1\ ,\ v = \frac{y}{x}$ نعوض بدل

$c_1 = \frac{2}{\frac{y}{x}-1} + ln\left|x\left(\frac{y}{x}-1\right)\right|$

$c_1 = \frac{2}{\frac{y-x}{x}} + ln|y-x|$

$c_1 = \frac{2x}{y-x} + ln|y-x|$

مثال جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $2x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

$2x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

$2\,\frac{x^2}{x^2}\,\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}$ بالقسمة على $x^2 \neq 0$

$2\,\frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$

$Let\ \frac{y}{x} = v\ \Rightarrow y = vx\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$2\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) = 1 + v^2$

$$2v + 2x\frac{dv}{dx} = 1 + v^2$$

$$2x\frac{dv}{dx} = 1 + v^2 - 2v$$

$$2x\frac{dv}{dx} = v^2 - 2v + 1$$ نفصل المتغيرات

$$\frac{dv}{v^2-2v+1} = \frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{dv}{(v-1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$$ نكامل الطرفين

$$\int (v-1)^{-2} dv = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{(v-1)^{-1}}{-1} = \frac{1}{2}\ ln|x| + c$$

$$\frac{-1}{(v-1)} = \frac{ln|x|+2c}{2}$$ بقلب التناسب وضرب الطرفين بـ (-1)

$$v - 1 = \frac{-2}{ln|x|+2c}$$

$$2c = c_1\ ,\ v = \frac{y}{x}$$ بالتعويض عن

$$\frac{y}{x} - 1 = \frac{-2}{ln|x|+c_1}\ ] * x \Rightarrow y - x = \frac{-2x}{ln|x|+c_1}$$

$$y = x - \frac{2x}{ln|x|+c_1}$$

تمارين [3 – 5]

حل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

1) $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$Let\ \frac{y}{x} = v \Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + e^v$$ نعوض في (1)

$$x\frac{dv}{dx} = \cancel{v} + e^v - \cancel{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = e^v$$

$$\int \frac{dv}{e^v} = \int \frac{dx}{x}$$ نفصل المتغيرات ثم نكامل

$$\int e^{-v}\, dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\int -e^{-v}\, dv = \int \frac{dx}{x}$$

$-e^{-v} = ln|x| + c$

$\frac{-1}{e^v} = ln|x| + c$

$c = -\frac{1}{e^v} - ln|x|$

$v = \frac{y}{x}$ نعوض عن

$c = -\frac{1}{e^{\frac{y}{x}}} - ln\, x$

2) $(y^2 - xy)dx + x^2 dy = 0$

$x^2\, dy = -(y^2 - xy)\, dx\ ] \div x^2\, dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}$ $x^2 \neq 0$ بالقسمة على

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1} \dots\dots\dots (1)$

$Let\ \frac{y}{x} = v \Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ (1) نعوض في

$v + x\frac{dv}{dx} = v - v^2$

$x\frac{dv}{dx} = v - v^2 - v$

$x\frac{dv}{dx} = -v^2$ نفصل المتغيرات

$\frac{dv}{v^2} = -\frac{dx}{x}$

$\int v^{-2}\, dv = -\int \frac{dx}{x}$

$\frac{v^{-1}}{-1} = -ln|x| + c$

$\frac{-1}{v} = -ln|x| + c$

$v = \frac{y}{x}$ نعوض عن

$\frac{-1}{\frac{y}{x}} = -ln|x| + c$

$-\frac{x}{y} = -ln\, x + c$

$y = \frac{-x}{-ln|x| + c} \Rightarrow y = \frac{-x}{-(ln|x| - c)} \Rightarrow y = \frac{x}{ln|x| - c}$

$y = \frac{x}{ln|x| + c_1}$ $\Leftarrow$ (c_1) ثابت أختياري نعوض بدلاً عنه بـ $(-c)$

3) $(x+2y)dx+(2x+3y)dy=0$

$$(2x+3y)dy=-(x+2y)dx\ ]\div dx$$

$$(2x+3y)\frac{dy}{dx}=-(x+2y)\ ]\div(2x+3y)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(x+2y)}{2x+3y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{x}{x}-\frac{2y}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{3y}{x}}$$ بالقسمة على $x\neq 0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1-2\frac{y}{x}}{2+3\frac{y}{x}}\ \dots\dots\dots(1)$$

$$Let\ v=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xv\ \Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$$

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{-1-2v}{2+3v}$$ نعوض في (1)

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v}{2+3v}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v-v(2+3v)}{2+3v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v-2v-3v^2}{2+3v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-(3v^2+4v+1)}{2+3v}$$ نفصل المتغيرات

$$\frac{2+3v}{(3v^2+4v+1)}dv=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{2+3v}{3v^2+4v+1}dv=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{6v+4}{3v^2+4v+1}dv=-\int\frac{dx}{x}$$

مشتقة المقام هي $6v+4$ اذن نحتاج ضرب البسط ب 2 اذن نضرب ونقسم على 2

$$\frac{1}{2}ln|3v^2+4v+1|=-ln|x|+ln|c|$$

$$ln|3v^2+4v+1|^{\frac{1}{2}}=ln|x|^{-1}+ln|c|$$

$$ln\sqrt{3v^2+4v+1}=ln\left|\frac{c}{x}\right|$$ بأخذ e للطرفين

$$\sqrt{3v^2+4v+1}=\left|\frac{c}{x}\right|$$ بتربيع الطرفين

$$3v^2+4v+1=\frac{c^2}{x^2}$$

$$3\frac{y^2}{x^2}+4\frac{y}{x}+1=\frac{c^2}{x^2}$$ $\Leftarrow v=\frac{y}{x}$ نعوض بدلاً عن

نضرب الطرفين بـ (x^2)

$3y^2 + 4yx + x^2 = c^2$

$\therefore$ c^2 ثابت اختياري نعوض بدلاً عنه c_1

$\therefore c_1 = x^2 + 4xy + 3y^2$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

بالقسمة على $x^2 \neq 0$ ينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\,\frac{y}{x}}$$

$$Let\ \frac{y}{x} = v \Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2-2v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v}$$

نفصل المتغيرات

$$\int \frac{2v}{1-v^2}\,dv = \int \frac{dx}{x}$$

مشتقة المقام هي $-2v$ اذن نحتاج ان نضرب ونقسم على السالب

$$-\int \frac{-2v}{1-v^2}\,dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\ln|1-v^2| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|1-v^2|^{-1} = \ln|cx|$$

$$\ln\frac{1}{|1-v^2|} = \ln|cx|$$

بأخذ e للطرفين

$$\frac{1}{|1-v^2|} = |cx|$$

$$\frac{1}{1-v^2} = \mp cx$$

$$\frac{1}{1-\frac{y^2}{x^2}} = \mp cx$$

$$\frac{1}{\frac{x^2-y^2}{x^2}} = \mp cx$$

$$\frac{x^2}{x^2-y^2} = \mp cx\ \ ] \div x$$

$$\frac{x}{x^2-y^2} = \mp c \Rightarrow c = \mp\frac{x}{x^2-y^2}$$

5) $(y^2 - x^2)dx + xy\,dy = 0$

$$xy\,dy = -(y^2 - x^2)dx$$

$$xy\frac{dy}{dx} = -y^2 + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2+x^2}{xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}}$$ بالقسمة على $x^2 \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$$

$$Let\ v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{v} \Longrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2-v^2}{v} \Longrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-2v^2}{v}$$

$$\frac{v}{1-2v^2}dv = \frac{dx}{x}$$ نفصل المتغيرات

$$-\frac{1}{4}\int\frac{-4v}{1-2v^2}dv = \int\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{4}ln|1-2v^2| = ln|x| + ln|c|$$

$$ln|1-2v^2|^{-\frac{1}{4}} = ln|cx|$$

$$ln\frac{1}{\sqrt[4]{1-2v^2}} = ln|cx|$$ بأخذ e للطرفين

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-2v^2}} = |cx|$$ نقلب التناسب ونرفع للقوة(4) للطرفين

$$1 - 2v^2 = \frac{1}{c^4x^4}$$

$$2v^2 = 1 - \frac{1}{c^4x^4}$$

$$2\frac{y^2}{x^2} = 1 - \frac{1}{c^4x^4}] * x^2$$ نعوض عن $v = \frac{y}{x}$

$$2y^2 = x^2 - \frac{x^2}{c^4x^4}] \div 2$$

$$y^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{c^4x^2}\right)$$ بالجذر

$$y = \mp\sqrt{\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{c^4x^2}\right)}$$

$$y = \mp\sqrt{\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{c_1x^2}\right)}$$ نعوض بدلاً عن c^4 بـ (c_1)

$6)\ x^2y\,dx = (x^3+y^3)dy$

$$x^2y = (x^3+y^3)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3+y^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2y}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{y^3}{x^3}}$$ بالقسمة على $x^3 \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}$$

$$Let\ v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v-v(1+v^3)}{1+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v-v-v^4}{1+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^4}{1+v^3}$$

$$\frac{1+v^3}{v^4}dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\left(\frac{1}{v^4}+\frac{v^3}{v^4}\right)dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{v^4}+\frac{1}{v}\right)dv = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(v^{-4}+\frac{1}{v}\right)dv = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^{-3}}{-3} + ln|v| = -ln|x| + c$$

$$c = \frac{-1}{3v^3} + ln|v| + ln|x|$$

$$c = \frac{-1}{3v^3} + ln|xv|$$

$$c = \frac{-1}{3\frac{y^3}{x^3}} + ln\left|x\frac{y}{x}\right|$$ نعوض عن $v = \frac{y}{x}$

$$c = \frac{-x^3}{3y^3} + ln|y|$$

$$7)\ x\left(\frac{dy}{dx}-\tan\frac{y}{x}\right)=y$$

$$x\left(\frac{dy}{dx}-\tan\frac{y}{x}\right)=y\ ]\ \div x$$

$$\frac{dy}{dx}-\tan\frac{y}{x}=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$Let\ \frac{y}{x}=v\ \Rightarrow y=vx\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=v+\tan v$$ نعوض في ١ ينتج

$$x\frac{dv}{dx}=\cancel{v}+\tan v-\cancel{v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\tan v$$

$$\frac{dv}{\tan v}=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{dv}{\frac{\sin v}{\cos v}}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{\cos v}{\sin v}dv=\int\frac{dx}{x}$$

$$ln|\sin v|=ln|x|+ln|c|$$

$$ln|\sin v|=ln|cx|$$ بأخذ e للطرفين

$$|\sin v|=|cx|$$

$$\sin v=\mp cx$$

$$\sin\frac{y}{x}=\mp cx$$ نعوض عن $v=\frac{y}{x}$

$$\therefore c=\mp\frac{\sin\frac{y}{x}}{x}$$

الفصل السادس (الهندسة الفضائية)

سبق وأن علمنا إن كلاً من المستقيم والمستوي مجموعة غير منتهية من النقط وإن كل نقطتين تعينان مستقيماً واحداً وواحد فقط وكل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعين مستوياً واحداً فقط، وكل أربعة نقط لا تقع في مستوٍ واحد تعين فضاء.

أي إن المستقيم يحتوي على نقطتين على أقل تقدير، والمستوي يحتوي على ثلاث نقط على أقل تقدير لا يحتويها مستقيم واحد، والفراغ يحتوي على أربع نقط على أقل تقدير ليست جميعها في مستو واحد.

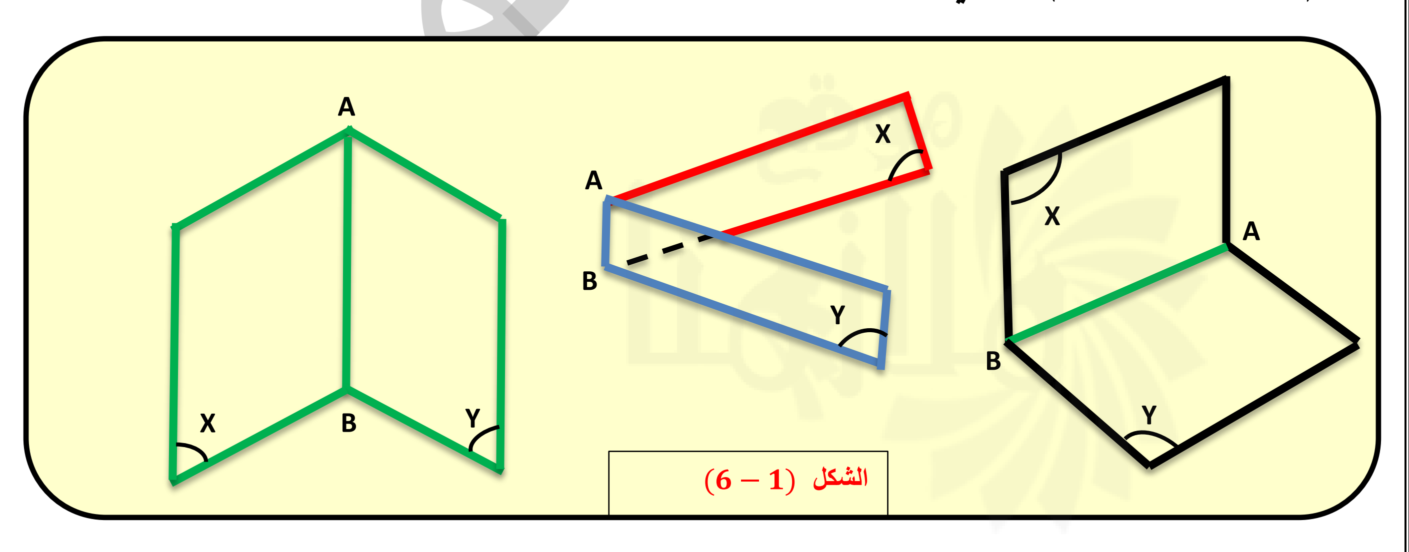
كما تعرفنا على علاقات بين المستقيمات والمستويات وبرهنا بعض المبرهنات التي يمكن الإفادة منها في مبرهنات جديدة ستتعرف عليها في هذا الفصل.

ولكي تتمكن من التواصل معنا وتتعرف على علاقات جديدة بين المستقيمات والمستويات والمستويات وتكتسب مفاهيم جديدة وتبرهن مبرهنات أخرى ما عليك إلا الرجوع إلى مراجعة ما درسته في هذا الموضوع في السنة السابقة.

الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة

الزاوية الزوجية : إتحاد نصفي مستويين لهما حافة (Edge) مشتركة

تسمى الحافة المشتركة بـ(حرف الزاوية الزوجية $Edge\ Dihedral$) ويسمى كل من نصفي المستويين بـ(وجه الزاوية الزوجية) كما في الشكل $(6-1)$:



الشكل $(6-1)$

حيث $\overleftrightarrow{AB}$ هو حرف الزاوية الزوجية و (x) و (y) هما وجهاها

ويعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير $(X)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$

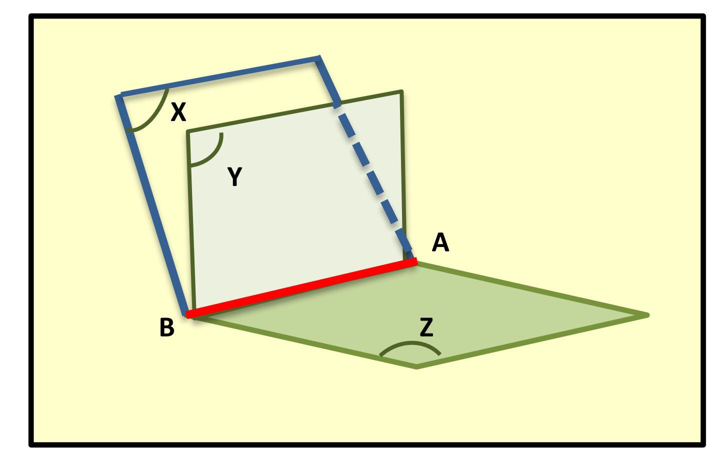
وقد يعبر عنها بحرف الزاوية الزوجية إن لم يكن مشتركاً مع زاوية أخرى.

مثلاً : الزاوية الزوجية

$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Z)$

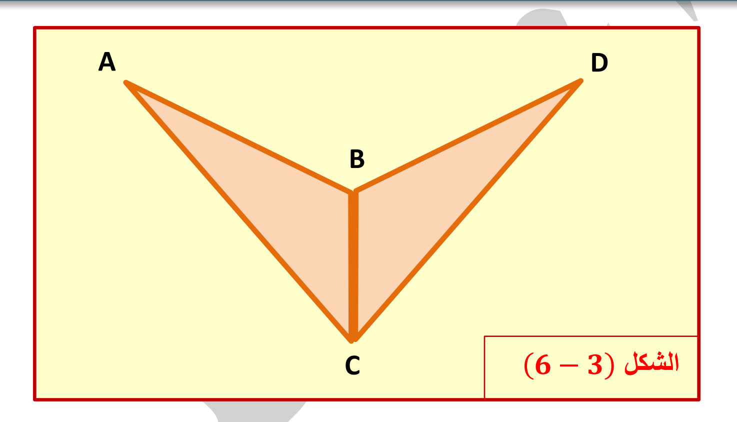
$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

$(Y) - \overleftrightarrow{AB} - (Z)$



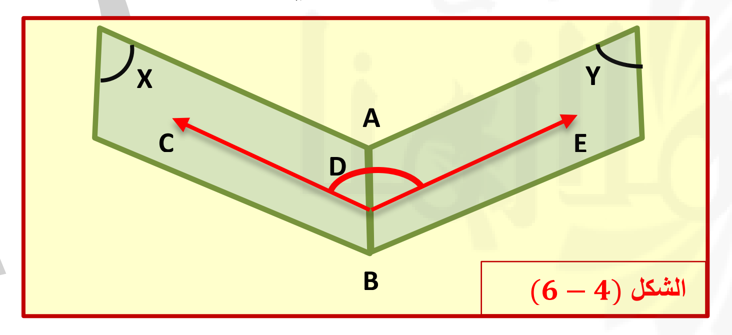
ولا يمكن أن تكتب الزاوية الزوجية بشكل $\overleftrightarrow{AB}$ في هذا المثال لأن الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ مشترك في أكثر من زاوية زوجية

ملاحظة: عندما تكون أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد، تكتب الزاوية الزوجية $A - \overleftrightarrow{BC} - D$ أو الزاوية الزوجية بين المستويين $(ABC), (DBC)$ كما في الشكل $[6-3]$



الشكل $(6-3)$

وتقاس الزاوية الزوجية كالآتي: نأخذ نقطة D على الحافة المشتركة $\overleftrightarrow{AB}$ ونرسم من D العمود $\overrightarrow{DC}$ في (X) والعمود $\overrightarrow{DE}$ في (Y) وعلى الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ فيكون قياس الزاوية الزوجية بين المستويين هو قياس الزاوية CDE وتسمى الزاوية CDE الزاوية العائدة للزاوية الزوجية (كما في الشكل $(6-4)$).



الشكل $(6-4)$

بعبارة أخرى لدينا الزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

ولدينا $\overrightarrow{DC} \subset (x)$, $\overrightarrow{DE} \subset (y)$

$\overrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\measuredangle$ CDE هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$ او $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

تعريف : الزاوية المستوية العائد لزاوية زوجية: هي الزاوية التي ضلعاها عموديان على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي إليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية.
أو هي اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي إليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية.

ومن تعريف الزاويتين العائدة والزوجية يمكن استنتاج الآتي:

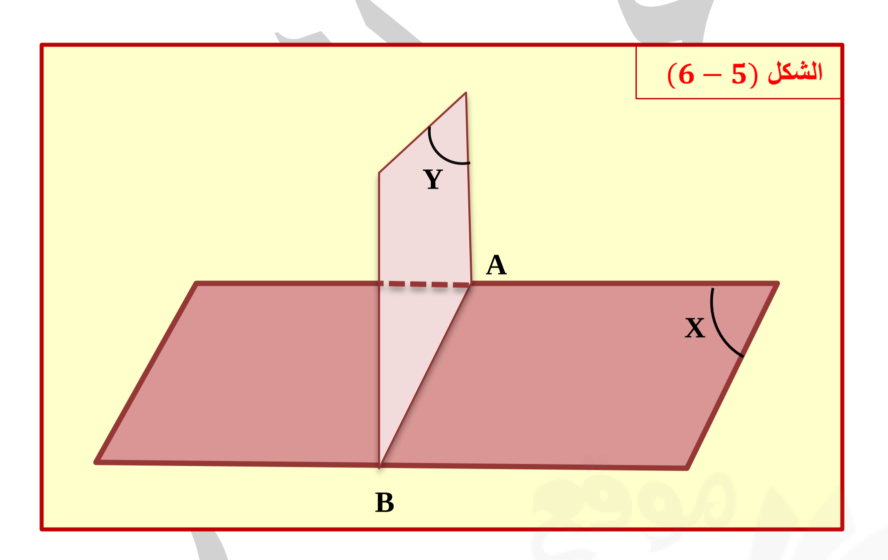
١) قياس زاوية عائدة لزاوية زوجية ثابت.

٢) قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس.

تعريف : اذا كانت الزاوية الزوجية قائمة فأن المستويين متعامدان وبالعكس

$(X) \perp (Y) \Leftrightarrow$ قياس $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y) = 90^\circ$

الشكل (5 – 6)



مبرهنة (7) : إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عموديا على المستوي الآخر

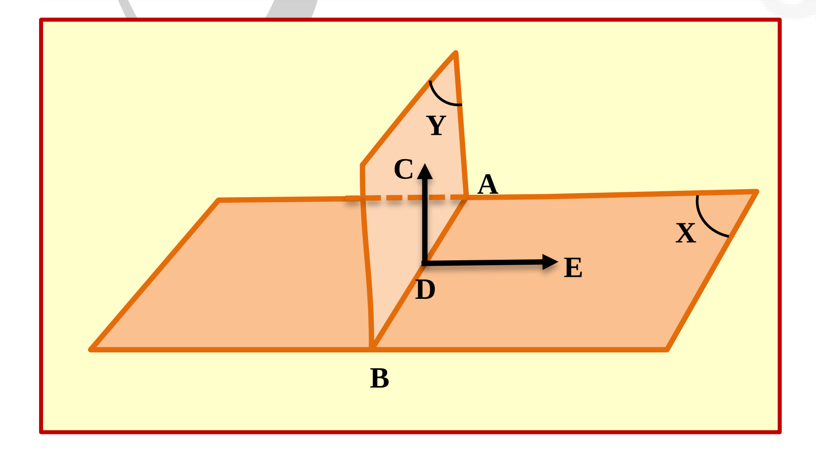
أي إنه : إذا كان $(X) \perp (Y)$

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)\ ,\ \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

في D

فإن $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$



المعطيات : في نقطة D $\quad (X) \perp (Y)\,,\ (X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}\,,\ \overleftrightarrow{CD} \subset (Y)\,,\ \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

المطلوب إثباته : $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان :

في(X) نرسم $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)\,,\ \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore \sphericalangle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore m\sphericalangle CDE = 90°$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة له وبالعكس)

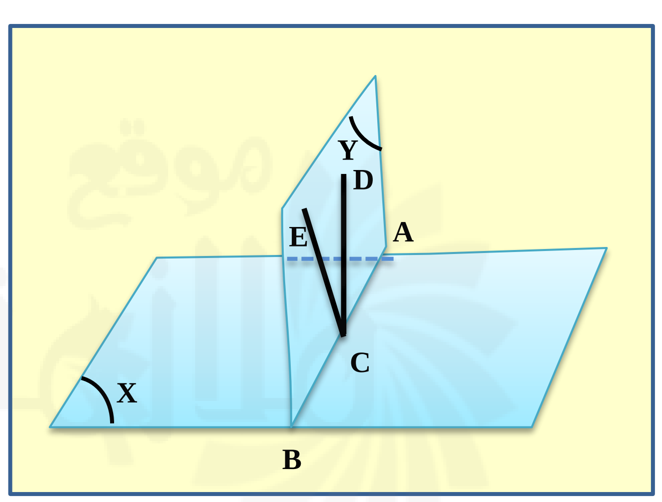
$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ (إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين $90°$ فإن المستقيمين متعامدان وبالعكس).

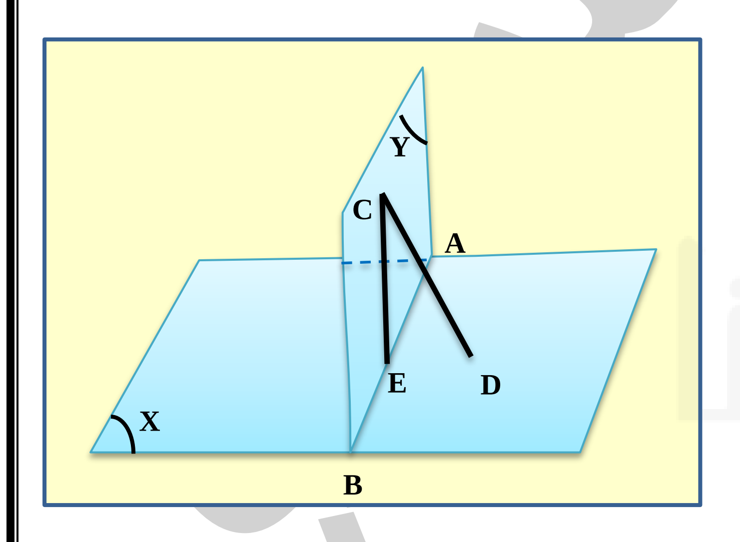
$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودي على مستويهما)

و . هـ . م

نتيجة مبرهنة (7) : إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة أحدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوى فيه

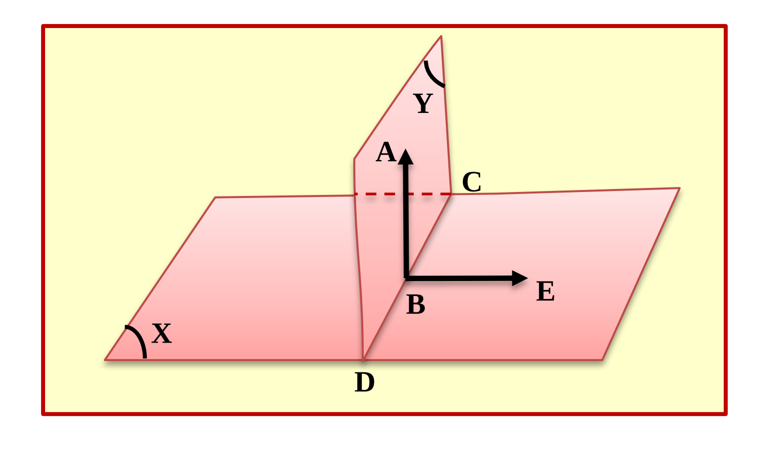
أي إنه





$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)\,,\ C \in (Y)\,,\ (Y) \perp (X) \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

مبرهنة (8) : كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي أو يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الآخر



أي إنه

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AB} \perp (X) \\ \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)\end{array}\right] \Rightarrow (Y) \perp (X)$$

المعطيات : $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$

المطلوب إثباته : $(Y) \perp (X)$

البرهان :

ليكن $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم).

$B \in \overleftrightarrow{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة).

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة).

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره).

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$ (معطى).

$\therefore \measuredangle ABC$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore m\measuredangle ABE = 90^\circ$ (لأن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$)

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{CD} - (X) = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس).

$\therefore (Y) \perp (X)$ (إذا كان قياس الزاوية الزوجية 90^0 فإن المستويين متعامدان وبالعكس)

و . هـ . م

مبرهنة (9) : من مستقيم غير عمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم

أي إنه

$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)

فيوجد مستوي وحيد يحتوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

المعطيات : $\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)

المطلوب إثباته : إيجاد مستوٍ وحيد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)



البرهان :

من نقطة (A) نرسم $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي إليه).

$\because$ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان

$\therefore$ يوجد مستوٍ وحيد مثل (Y) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما).

$\therefore$ $(Y) \perp (X)$ (مبرهنة 8)

ولبرهنة الوحدانية :

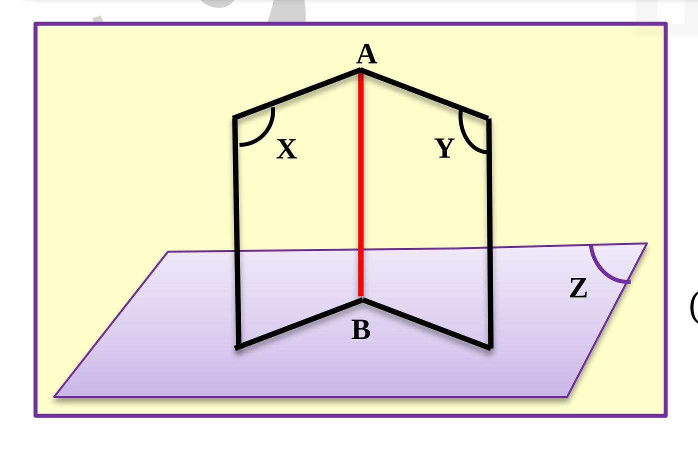
ليكن (Z) مستوي آخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

$\because$ $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (بالبرهان).

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AC} \subset (Z)$ (نتيجة مبرهنة 7)

$\therefore$ $(Y) = (Z)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما) و. هـ . م

نتيجة مبرهنة (9) : إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فإن مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث



المعطيات : $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

(X) , $(Y) \perp (Z)$

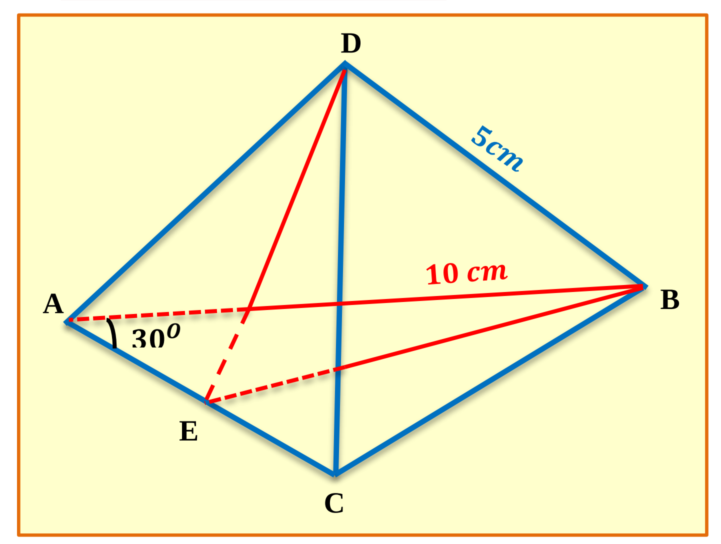
المطلوب إثباته : $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان: إن لم يكن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودياً على (Z)

لما وجد أكثر من مستوي يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (Z)

(مبرهنة 9).

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ و. هـ. م



مثال

في $\triangle ABC$

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m\sphericalangle A = 30^o$

$AB = 10\ cm$, $BD = 5\ cm$

جد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

المعطيات :

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m\sphericalangle BAC = 30^\circ$, $AB = 10cm$, $BD = 5cm$

المطلوب إثباته : إيجاد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

البرهان :

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على آخر من نقطة معلومة).

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى).

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة).

$\Leftarrow \sphericalangle DEB$ عائدة للزاوية الزوجية $\overline{AC}$ (تعريف الزاوية العائدة).

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من اثره).

$\Leftarrow \triangle DBE$ قائم الزاوية في B

في $\triangle BEA$ القائم الزاوية في E

$$\sin 30^\circ = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5cm$$

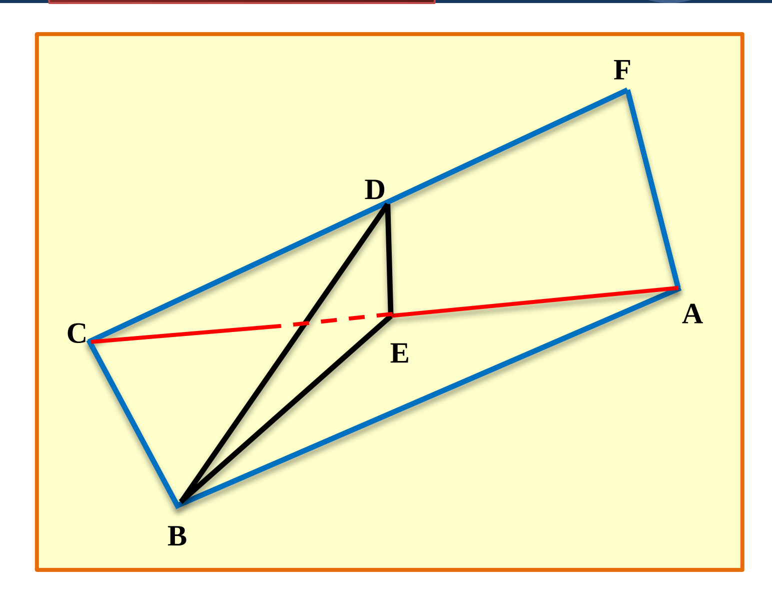
في $\triangle DBE$ القائم الزاوية في B

$$\tan \sphericalangle BED = \frac{5}{5} = 1$$

$\therefore$ قياس $m\sphericalangle BED = 45^o$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B = 45^o$ (قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

و . هـ . م



مثال

ليكن ABC مثلثاً وليكن $\overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$

$\overline{BE} \perp \overline{CA}$

برهن إن : $\overline{BE} \perp (CAF)$

$\overline{ED} \perp \overline{CF}$

المعطيات :

$\overline{AF} \perp (ABC)\,,\ \overline{BE} \perp \overline{CA}\,,\ \overline{BD} \perp \overline{CF}$

المطلوب إثباته :

$\overline{DE} \perp \overline{CF}\,,\ \overline{BE} \perp (CAF)$

البرهان :

$\because \overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى).

$\therefore (CAF) \perp (ABC)$ (مبرهنة 8 : يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الآخر).

$\because \overline{BE} \perp \overline{CA}$ (معطى).

$\therefore \overline{BE} \perp (CAF)$ (مبرهنة 7 : إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر).

$\because \overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{CF}$ (نتيجة مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

و . هـ . م



مثال

$(Y), (X)$ مستويان متعامدان

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{AB}$ عموديان على $\overleftrightarrow{BC}\,,\ \overleftrightarrow{BD}$

ويقطعان (Y) في C, D على الترتيب

برهن إن : $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

A
B
Z
C
D
X
Y

المعطيات :

إن $(X) \perp (Y)\,,\ \overleftrightarrow{AB} \subset (X)\,,\ \overleftrightarrow{BD}\,,\ \overleftrightarrow{BC}$ عموديين على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في $C\,,D$ على الترتيب.

المطلوب إثباته : $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان :

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BD}$,$\overleftrightarrow{BC}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوياً وحيداً يحويهما).

بما إن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما).

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$ (معطى)

$\therefore$ $(X) \perp (Z)$ (يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because$ $(X) \perp (Y)$ (معطى).

ولما كان $\overleftrightarrow{CD} = (Z) \cap (Y)$ (لأنه محتوى في كل منهما).

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

(إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فإن مستقيم تقاطعهما يكون عامودياً على المستوي الثالث).

و . هـ . م

تـمـاريـن [6 – 1]

١ – برهن إن مستوى الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها.

المعطيات: الزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

والزاوية CDE زاوية مستوية عائدة لها.

المطلوب إثباته : $\overleftrightarrow{AB} \perp (CDE)$

البرهان :

$\because$ الزاوية CDE زاوية عائدة للزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$

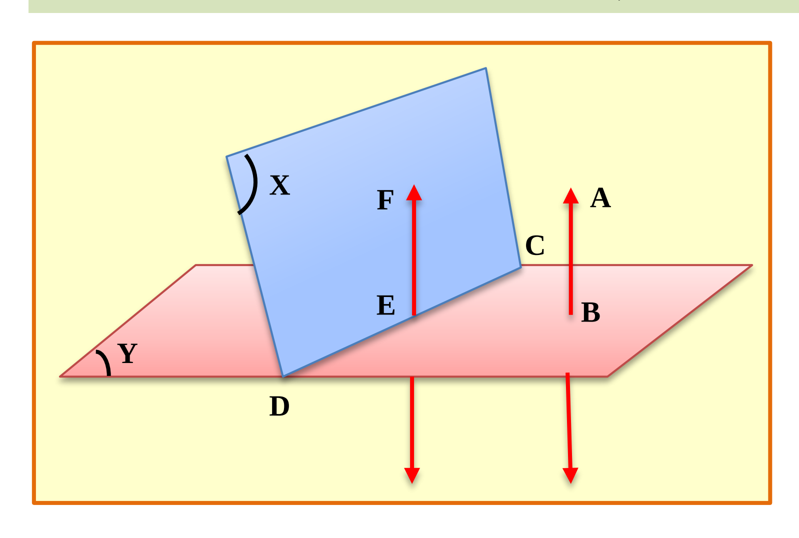
$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DE}$ من تعريف الزاوية العائدة للزاوية الزوجية

[وهي الزاوية الناتجة من اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي إليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية].

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (CDE)$ [المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودي على مستويها].



٢- برهن إنه إذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوٍ آخر فإن المستويين متعامدان.



المعطيات : $\overleftrightarrow{AB} \,//\, (X)\,,\ \overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$

المطلوب إثباته : $(X) \perp (Y)$

البرهان :

إن لم يكن (X) يقطع (Y).

فإن $(X)//(Y)$ [معطى].

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ [المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر]

ولكن هذا خلاف المعطيات

$\therefore$ (X) يقطع (Y)

وليكن: $\overleftrightarrow{CD} = (X)\cap(Y)$ [يتقاطع المستويان بخط مستقيم]

لتكن $E \in \overleftrightarrow{CD}$, وليكن $\overleftrightarrow{FE}//\overleftrightarrow{BA}$ [عبارة التوازي : يوجد مستقيم وحيد يوازي مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي إليه].

$\because$ $\overleftrightarrow{BA} \,//\, (X)$ [معطى].

$\therefore$ $\overleftrightarrow{EF} \subset (X)$ [إذا وازى مستقيم مستوياً فالمستقيم المرسوم من أية نقطة من نقط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى فيه].

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Y) \Leftarrow \overleftrightarrow{EF} \perp (Y)$ [المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر].

$\therefore$ $(X) \perp (Y)$ [يتعامد المستويان إذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر]، أو [كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ يكون عمودياً على المستو الآخر].

و. هـ . م

٣- برهن إن المستوى العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر أيضاً.

المعطيات : $(Z) \perp (Y)\,,\ (X) \,//\, (Y)$

المطلوب إثباته : $(Z) \perp (X)$

البرهان :

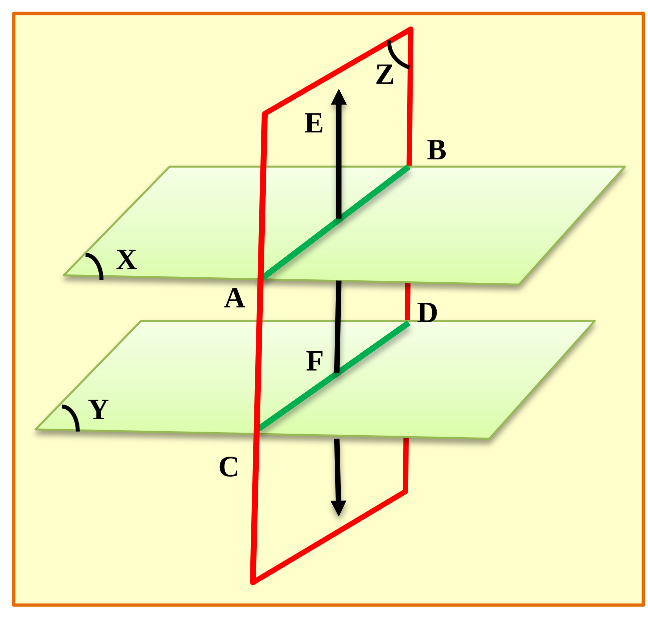
ليكن $\overleftrightarrow{AB} = (X)\cap(Z)$
وليكن $\overleftrightarrow{CD} = (Y)\cap(Z)$
[يتقاطع المستويان بخط مستقيم

ولتكن $E \in \overleftrightarrow{AB}$ ، نرسم $\overleftrightarrow{EF}$ محتوى في (Z)

بحيث $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{EF}$ [يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي إليه].



$\because (Z) \perp (Y)$ [معطى].



$\therefore \overleftrightarrow{EF} \perp (Y)$ [إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر].

لكن $(X)//(Y)$ [معطى]

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \perp (X)$ [المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر].

$(Z) \perp (X)$ [يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الآخر].

و . هـ . م

٤- A, B, C, D أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $\overline{AB} = \overline{AC}$ و $E \in \overline{BC}$ فإذا كانت $\sphericalangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$ برهن أن $\overline{CD} = \overline{BD}$

المعطيات : A, B, C, D اربع نقط مختلفة ليست في مستوٍ واحد.

$\overline{AB} = \overline{AC}$, $\sphericalangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$

المطلوب إثباته : $\overline{CD} = \overline{BD}$

البرهان :

$\sphericalangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$ [معطى]

$\therefore \overline{AE} \perp \overline{BC}$, $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ [الزاوية العائدة هي الزاوية الناتجة من اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي إليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية]

في المثلث $ABC \Leftarrow \overline{AB} = \overline{AC}$ [معطى]

$\therefore \overline{BE} = \overline{CE}$ [العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها]

المثلثان DEC , DEB فيهما

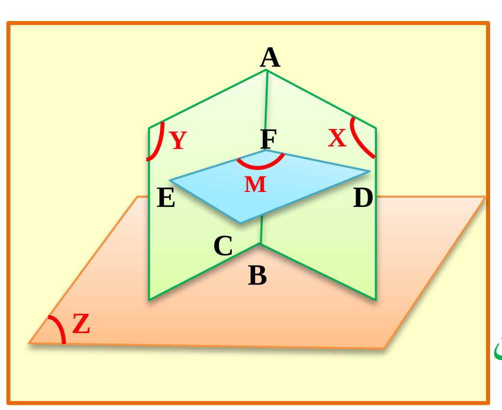
$m\sphericalangle 1 = m\sphericalangle 2$ [قوائم]

$\overline{ED} = \overline{ED}$ [ضلع مشترك]

$\overline{CE} = \overline{BE}$ [بالبرهان]

$\therefore$ يتطابق المثلثان بضلعين وزاوية محددة بهما ومن التطابق ينتج $\overline{CD} = \overline{BD}$. و . هـ . م

٥- برهن إنه إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عموديين على مستويين متقاطعين فإن مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم.



المعطيات: $\overline{CD} \perp (X)\,,\ \overline{CE} \perp (Y)$

$(X)\cap(Y) = \overline{AB}$

$\overline{CE}\,,\ \overline{CD} // (Z)$

المطلوب إثباته : $\overline{AB} \perp (Z)$

البرهان :

ليكن (M) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overline{CD}, \overline{CE}$ [لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوي وحيد يحتويهما]

$\because \overline{CE}\,,\ \overline{CD} // (Z)$ [معطى]

$\therefore (M) // (Z)$ [اذا كان كل من مستقيمين متقاطعين يوازيان مستوياً معلوماً فإن مستويهما يوازي المستوي المعلوم].

ولكن $\overline{CD} \perp (X)$ ، $\overline{CE} \perp (Y)$ [معطى]

$\therefore (M) \perp (X), (Y)$ [يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الآخر].

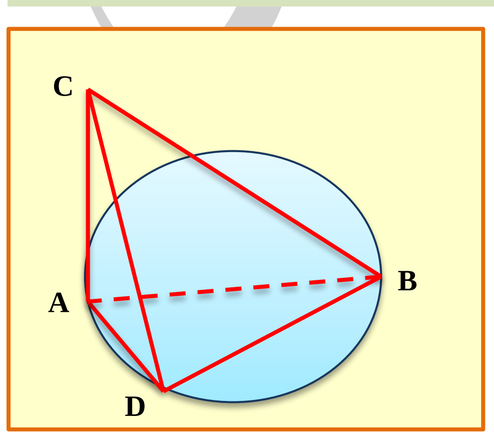
$\because (X)\cap(Y) = \overline{AB}$ [معطى]

$\therefore \overline{AB} \perp (M)$ [إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فإن مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث]

$\overline{AB} \perp (Z)$ [المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر].

(و. هـ. م)

٦- دائرة قطرها $(\overline{AB})$, $\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة . برهن ان (CDA) عمودي على (CDB).



المعطيات : $\overline{AB}$ قطر في الدائرة

$\overline{AC}$ عمودي على مستو الدائرة ، D نقطة تنتمي للدائرة

المطلوب إثباته : $(CDA) \perp (CDB)$

البرهان :

$\because \measuredangle ADB$ زاوية محيطة

$m\measuredangle ADB = 90^0$ [الزاوية المحيطية المقابلة لنصف دائرة قائمة]

$\therefore \overline{AD} \perp \overline{DB}$ [إذا كانت الزاوية بين مستقيمين قائمة فإن المستقيمين متعامدين].

$\because \overline{AC}$ عمودي على مستوي الدائرة [معطى].

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{DB}$ [مبرهنة الأعمدة الثلاثة].

$\therefore$ أصبح لدينا : $\overline{AD}$, $\overline{BD} \perp \overline{CD}$ [بالبرهان]

$\therefore \overline{BD} \perp (CDA)$ [المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما].

ولكن $\overline{BD} \subseteq (CDB)$

$\therefore (CDA) \perp (CDB)$ [يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الآخر]

و . هـ . م

الإسـقـاط العـمـودي على مـسـتـوٍ
The Orthogonal Projection on the Plane

١) مسقط نقطة على مستوٍ: هو أثر العمود المرسوم من تلك النقطة على المستوي.

٢) مسقط مجموعة نقط على مستوي : لتكن L مجموعة من نقاط في الفراغ فإن مسقطها هو مجموعة كل آثار الأعمدة المرسومة من نقاطه على المستوي.

٣) مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم : هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم.

ليكن AB غير عمودي على (X) وليكن

$(X) \perp \overline{AC} \Leftarrow$ مسقط A على (X) هو C

$(X) \perp \overline{BD} \Leftarrow$ مسقط B على (X) هو D

$\therefore$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) هو $\overline{CD}$

ملاحظة : إذا كان $\overline{AB}//(X)$ فإن $AB = CD$

٤) المستقيم المائل $(Inclined\ Line)$ على مستوٍ: هو المستقيم غير العمودي على المستوي وقاطع له.

٥) زاوية الميل $(Angle\ of\ Inclination)$: هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي.

ليكن $\overleftrightarrow{AB}$ مائلاً على (x) في B

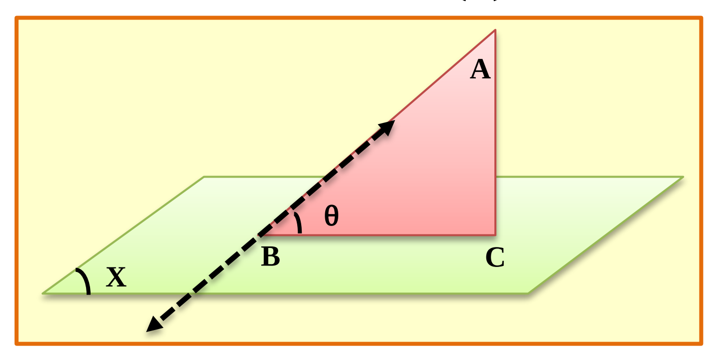
وليكن $\overline{AC} \perp (X)$ في C

$\therefore$ C مسقط A على (X) حيث $A \notin (X)$ كذلك B مسقط نفسها حيث $B \in (X)$

$\Leftarrow$ $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$على (X)

أي إن $0 < \theta < 90^0$

$\theta \in (0, 90^0)$



٦) طول المسقط

طول مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ = طول المائل × جيب تمام زاوية الميل.

فعندما تكون $\overline{AB}$ مائلاً على (X) وزاوية ميله θ ومسقطه $\overline{BC}$ فإن $BC = AB \cos\theta$

٧) مسقط مستوي مائل $(Inclined\ Plane)$ على (X)

زاوية ميل مستوٍ على مستوٍ معلوم هو قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما.

مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوٍ معلوم = مساحة المنطقة المائلة × جيب تمام زاوية الميل

لتكن A مساحة المنطقة المائلة و A' مساحة المسقط ، θ قياس زاوية الميل $A' = A.\cos\theta$

مثال إذا وازى أحد ضلعي زاوية قائمة مستوياً معلوماً فإن مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان

المعطيات :



$\measuredangle ABC$ قائمة في B ، $\overline{AB} // (X)$

$\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{B'C'}$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (X)

المطلوب إثباته : $\overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$

البرهان :

$\overline{A'B'}$ مسقط $\overline{AB}$

$\overline{B'C'}$ مسقط $\overline{BC}$ [معطى]

$\Leftarrow$ $\overline{CC'}, \overline{BB'}, \overline{AA'} \perp (X)$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة).

$\overline{BB'} // \overline{CC'}$, $\overline{AA'} // \overline{BB'}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

بالمستقيمين المتوازيين AA', BB' نعين (Y)
بالمستقيمين المتوازيين BB', CC' نعين (Z)
(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)

لكن $\overline{AB} // (X)$ (معطى)

$(Y) \cap (X) = A'B'$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$\Leftarrow \overline{AB} // \overline{A'B'}$ (إذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فإنه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم).

كذلك $\overline{BB'} \perp \overline{A'B'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوى).

$\overline{AB} \perp \overline{BB'}$ (في المستوي الواحد : المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر).

لكن $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ (لأن $m \sphericalangle ABC = 90^o$ معطى)

$\overline{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما).

$\Leftarrow \overline{A'B'} \perp (Z)$ (المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore \overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوى).

و . هـ . م

مثال

ABC مثلث ، $\overline{BC} \subset (X)$
والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث ABC والمستوي
(X) قياسها 60^o فإذا كان
$AB = AC = 13cm\,,\ BC = 10cm$
جد مسقط المثلث (ABC) على (X)
ثم جد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

A
13
13
B
10 E
D
C
X

المعطيات : $\triangle ABC\,,\ \overline{BC} \subset (X)$

قياس $(ABC) - \overleftrightarrow{BC} - (X) = 60^o$

$AB = AC = 13\,,\ BC = 10$

المطلوب إثباته : إيجاد مسقط $\triangle ABC$ على (X) وإيجاد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

البرهان :

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ في D (يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة)

$\therefore \overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$
$\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$
$\overline{BC}$ مسقط نفسه على (X)

(مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\therefore \triangle BCD$ مسقط $\triangle ABC$ على(X)

في (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم عمود على آخر من نقطة معلومة)

وبما أن $AC = AB$ (معطى)

$\therefore EC = BE = 5cm$ (العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها).

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

$\therefore \measuredangle DEA$ عائدة للزوجية $\overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

لكن قياس الزاوية الزوجية $\overline{BC} = 60^o$ (معطى)

في $\triangle AEB$ القائم في E :

$$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12\ cm$$

في $\triangle AED$ القائم في D

$$\cos 60^o = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow ED = 6cm$$

BCD مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30\ cm^2$

و . هـ . م

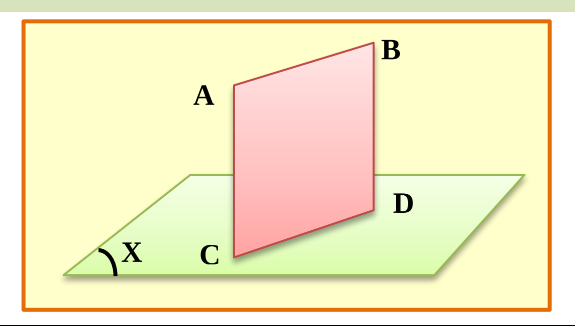
ملاحظة : لو طلب مساحة المسقط فقط فيمكن إيجاده كالآتي :

مساحة $BCD =$ مساحة $ABC \times \cos 60^o$

$$= \frac{1}{2} \times \left(12 \times 10 \times \frac{1}{2}\right) = 30\ cm^2$$

تـمـاريـن [2 – 6]

١– برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستوٍ معلوم يساوي طول مسقطه على المستو المعلوم ويوازيه.



المعطيات : $\overline{AB} // (X)$, $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AB}$ على(X)

المطلوب إثباته : ١) $\overline{AB} // \overline{CD}$

٢) $\overline{AB} = \overline{CD}$

البرهان :

∵ $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

∴ $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ عمودان على (X) [مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي]

∴ $\overline{AC}//\overline{BD}$ [المستقيمان العمودان على مستوٍ واحد متوازيان]

∴ بالمستقيمين المتوازيين $\overline{AC},\overline{BD}$ نعين (Y) [لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحتويها]

∵ $\overline{AB}//(X)$ (معطى)

∴ $\overline{AB}//\overline{CD}$ [مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في أحدهما ويوازي الآخر] أو [إذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فإنه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم].

و . هـ . م (1)

∴ الشكل $(ABDC)$ متوازي أضلاع [لأن كل ضلعين متقابلين متوازيين].

∴ $\overline{AB}=\overline{CD}$ [خواص متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين فيه متساويين بالطول].

و . هـ . م (2)

٢) برهن أنه إذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فإن ميله على أحدهما يساوي ميله على الآخر.

المعطيات : $(X)//(Y)$, $\overleftrightarrow{AC}\cap(X)=\{B\}$

$\overleftrightarrow{AC}\cap(Y)=\{C\}$

المطلوب إثباته : ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

البرهان :

نرسم $\overleftrightarrow{AD}\perp(X)$ [يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة].

∵ $(X)//(Y)$ (معطى)

∴ $\overleftrightarrow{AD}\perp(Y)$ في نقطة E [المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديا على الآخر].

∴ $\overline{BD}$ مسقط $\overline{AC}$ على (X)

وكذلك $\overline{CE}$ مسقط $\overline{AC}$ على (Y)

[مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي]

∴ $\sphericalangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)] زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ معلوم هي الزاوية المحددة
$\sphericalangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (Y) بالمائل ومسقطه على المستو المعلوم]

$\overline{BD}//\overline{CE}$] خطا تقاطع المستويين المتوازيين بمستوٍ ثالث متوازيان]

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$] إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما وتوازى مستويهما].

∴ ميل $\overline{AC}$ على (X) = ميل $\overline{AC}$ على (Y)

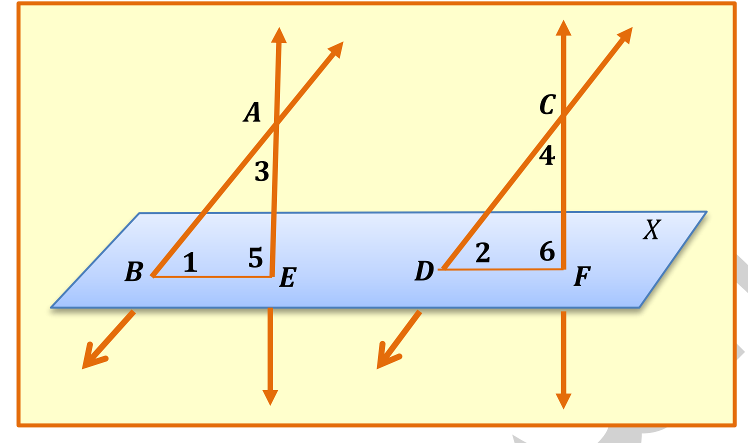
و . هـ . م

٣- برهن على أن المستقيمات المتوازية المائلة على مستوٍ الميل نفسه

المعطيات : $\overline{AB}//\overline{CD}$ وكل منهما مائل على (X)

المطلوب إثباته : قياس زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x) = قياس زاوية ميل $\overline{CD}$ على (x)

البرهان :



ليكن $\overline{AE} \perp (X)$ في E] يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستو معلوم من نقطة معلومة]
$\overline{CF} \perp (X)$ في F

∴ $\overline{BE}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)
$\overline{DF}$ مسقط $\overline{CD}$ على (X)

] مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي].

∴ $\sphericalangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)] زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ معلوم هي الزاوية المحددة
$\sphericalangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{CD}$ على (X) بالمائل ومسقطه على المستوي المعلوم].

∴ $\overline{AB}//\overline{CD}$ (معطى)

$m\sphericalangle 3 = m\sphericalangle 4$] إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما]

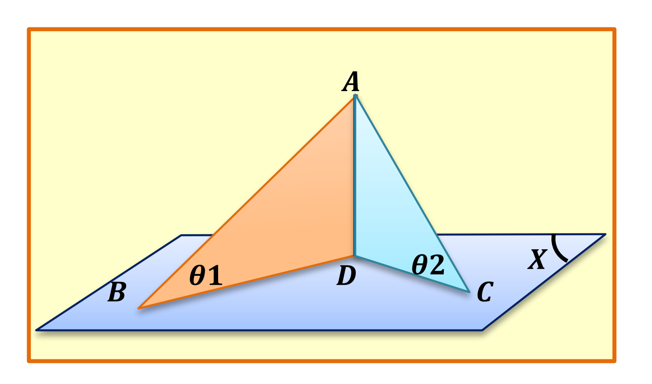
$m\sphericalangle 5 = m\sphericalangle 6 = 90^{\circ}$] المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي].

∴ $m\sphericalangle 1 = m\sphericalangle 2$] مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180^{o}$]

∴ قياس زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) = قياس زاوية ميل $\overline{CD}$ على (X)

و . هـ . م

٤- برهن على انه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي إلى مستوٍ معلوم فإن أطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه.



المعطيات : $A \notin (X)$, $\overline{AB} > \overline{AC}$

المطلوب إثباته : زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) اصغر من زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

البرهان :

ليكن $\overline{AD} \perp (X)$ [يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ من نقطة لا تنتمي إليه]

$\therefore$ $\overline{DB}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)
$\overline{DC}$ مسقط $\overline{AC}$ على (X)
[مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي]

$\sphericalangle\theta_1$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)
$\sphericalangle\theta_2$ زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)
[زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ معلوم هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على ذلك المستوي]

$\because$ $\overline{AB} > \overline{AC}$ (معطى)

$\therefore$ $\frac{1}{AB} < \frac{1}{AC}$ (خواص التراجح)

وبضرب طرفي المتراجحة بـ $\overline{AD}$ ينتج : $\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC}$

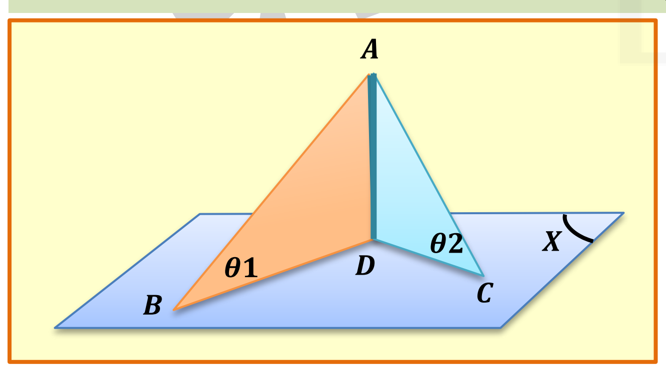
$\sin\theta_1 < \sin\theta_2$ [وبرفع sin من الطرفين لأن دالة sin دالة متزايدة]

$\therefore$ $\theta_1 < \theta_2$

$\therefore$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x) < زاوية ميل $\overline{AC}$ على (x)

و . هـ . م

٥- برهن على إنه إذا رسم مائلان من نقطة ما إلى مستوٍ فأصغرهما ميلاً هو الأطول



المعطيات : $\overline{AB}, \overline{AC}$ مائلان على (X)

زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X) > زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)

المطلوب إثباته : $\overline{AB} > \overline{AC}$

البرهان :

ليكن $\overline{AD} \perp (X)$ [يمكن رسم مستقيم عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي إليه].

$\therefore$ $\overline{DB}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) ⎤ [مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم هو قطعة المستقيم
$\overline{DC}$ مسقط $\overline{AC}$ على (X) ⎦ المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي]

$\therefore$ $\measuredangle\theta_1$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) ⎤ [زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ معلوم هي الزاوية المحددة
$\measuredangle\theta_2$ زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X) ⎦ بالمستقيم ومسقطه على ذلك المستوي]

$m\measuredangle\theta_1 < m\measuredangle\theta_2$ (معطى)

وبأخذ دالة sin للطرفين

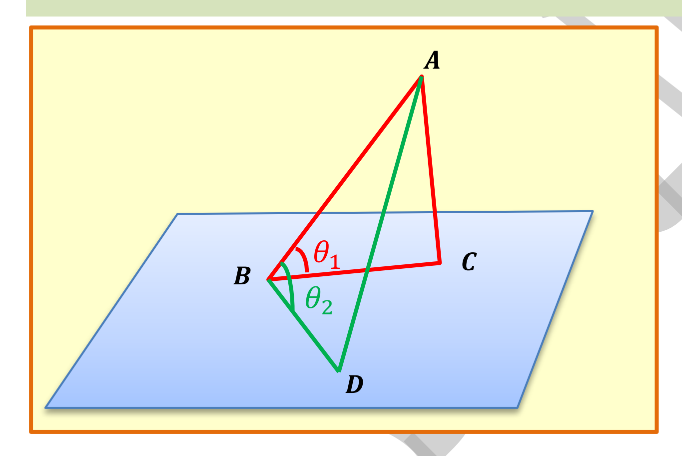
$\sin\theta_1 < \sin\theta_2$

$\therefore \frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC}$ [وبقسمة طرفي المتراجحة على AD]

$\frac{1}{AB} < \frac{1}{AC}$ وبقلب التراجح ينتج : $AB > AC$ [خواص التراجح]

و . هـ . م

٦- برهن على أن زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ أصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه وأي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي.



المعطيات : $\overline{AB}$ مائل على (X)

$\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{BD} \subseteq (X)$

θ_1 محددة بـ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$

θ_2 محددة بـ $\overline{AB}$, $\overline{BD}$

المطلوب إثباته : $m\measuredangle\theta_1 < m\measuredangle\theta_2$

البرهان :

نرسم $\overline{AC} \perp (X)$ [يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة].

ونرسم $\overline{AD} \perp \overline{BD}$ [يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي إليه].

$AC < AD$ [العمود النازل من نقطة معلومة على مستوي هو أقصر مسافة بين النقطة المعلومة والمستوي].

وبالقسمة على AB

$\frac{AC}{AB} < \frac{AD}{AB}$

$\therefore \sin\theta_1 < \sin\theta_2$

$\Rightarrow m\measuredangle\theta_1 < m\measuredangle\theta_2$

و . هـ . م